Министерство образования РФ

ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

ОБРАБОТКА ДАННЫХ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к лабораторным работам

Составители:
Ринчинов А.П.
Санеев Э.Л.

Улан-Удэ, 2003

Ринчинов А.П., Санеев Э.Л. *Обработка данных физического эксперимента: Методические указания к лабораторным работам. – Улан-Удэ: Физика/ВСГТУ, 2003. – 50 с.*

В методическом пособии рассмотрены некоторые положения теории погрешностей, позволяющие проводить элементарные оценки погрешностей. Дается классификация погрешностей с учетом промахов. Представлена методика расчета случайных погрешностей прямых измерений с применением распределения Стьюдента, определения приборной и общей погрешности прямых измерений. Погрешности косвенных измерений находятся через частные производные функции многих переменных, как среднеквадратичные отклонения от наиболее вероятного значения, измеряемой величины. Приводятся правила математически грамотного представления численных, графических и табличных результатов физического эксперимента и метод наименьших квадратов для построения прямой по экспериментальным точкам.

Для студентов технических и технологических специальностей.

1. ЗАДАЧА ИЗМЕРЕНИЙ

В точных науках, в частности в физике, основным способом получения информации является измерение различных физических величин. Измерение физической величины заключается в сравнении её с другой однородной ей физической величиной, принятой за единицу меры. За единицу меры длины, например, принят 1 метр, массы - 1 килограмм, силы тока - 1 Ампер и т.д.

При измерениях физических величин пользуются не самими эталонами физических величин, а измерительными приборами, которые тем или иным способом сверены с эталонами, хранящимися в государственных метрологических учреждениях. Это относится к приборам, с помощью которых измеряют длину (линейки, штангенциркули, микрометры), время (часы, секундомеры), массу (различного рода весы, гири), а также к электроизмерительным приборам (амперметры, вольтметры).

Сравнение измерительных приборов и инструментов с эталонами всегда сопровождается неточностью в их калибровке. Например, длина метровой линейки не совпадает с международным метром. Тут сказывается и несовершенство технологии изготовления линеек и изменение длины линейки с изменением температуры и многое другое. Ясно поэтому, что с помощью измерительных приборов невозможно провести абсолютно точные измерения, т.е. установить истинное значение измеряемой величины. Результат измерения будет в большей или меньшей степени отличаться от истинного значения или, как принято говорить, будет содержать погрешность.

Приборные погрешности, о которые говорилось выше, принципиально неустранимы. Однако они являются лишь одним из видов погрешностей измерений. На результат измерения, кроме того, может влиять множество внешних факторов (электрические и магнитные поля, вибрации, колебания температура среды, давления, влажности и т.д.), несовершенство органов чувств, а также ограниченный характер наших знаний.

Таким образом, никакие измерения не могут быть выполнены абсолютно точно. Отличие результата измерения от истинного значения ведет к следующему правилу, обязательное выполнение которого лежит в основе профессиональной культуры каждого инженера.

Численное значение полученной из опыта физической величины должно обязательно сопровождаться указанием величины возможной ошибки.

Например, результат измерения некоторой величины X должен быть представлен в виде

$$X_{ист} = X_{изм} \pm \Delta X,$$

где $X_{ист}$, $X_{изм}$ - измеренное и истинное значения физической величины; ΔX - погрешность измерения. Такая запись означает, что истинное значение величины находится где-то внутри интервала ($X_{изм}$ - ΔX; $X_{изм}$ + ΔX). Без подобной информации о точности измерения результат его будет бесполезен при проведении дальнейших расчётов для каких-либо практических целей или для проверки теоретических выводов и т.д.

Итак, в задачу измерения входит не только нахождение самой величины, но и определение величины возможной погрешности. Методы их расчёта и способы уменьшения изучает теория погрешностей (см., например, /1 - 4/). Ниже будут рассмотрены некоторые положения этой теории, позволяющие проводить элементарные оценки погрешностей.

2. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Измерения принято разделять на два основных вида - прямые и косвенные. Те измерения, при которых численные значения физических величин получается непосредственно с помощью измерительного прибора или инструмента, называются прямыми. Так, измерения времени с помощью секундомера, длины с помощью линейки, силы тока с помощью амперметра и др. является прямыми измерениями.

Если искомая величина связана некоторой функциональной зависимостью с одной или несколькими величинами, измеряемыми непосредственно с помощью приборов, то после проведения этих прямых измерений искомая величина будет вычислена по формуле. Измерения такого вида называются косвенными. Например, величину сопротивления можно рассчитать из закона Ома, предварительно измерив напряжение и силу тока с помощью вольтметра и амперметра

$$R = U/I$$

Как уже отмечалось, результат измерения всегда отличается от истинного значения физической величины, т.е. содержит погрешность. В зависимости от причины появления погрешности принято подразделять на три типа: промахи, систематические и случайные погрешности.

Промахи, или грубые ошибки могут возникать в результате неправильных действий экспериментатора (неверное считывание показаний с прибора, ошибочная запись, неправильное включение прибора и т.д.) или при нарушении условий эксперимента (колебания напряжений, изменение температуры материала, его загрязнение и др.). При обработке результатов измерений промахи должны быть исключены, в теории погрешностей для этого существует специальная методика / 1-3/, она будет рассмотрена ниже.

Систематическими называются погрешности, величина и знак которых не меняются во всех измерениях, проводимых в одинаковых условиях. Систематические погрешности можно разделить на четыре группы/1 /:

1. Погрешности известной природы, величина которых может быть достаточно точно определена. Такие погрешности учитываются с помощью поправок, прибавляемых к результату измерения. Типичными примерами являются: введение поправок на учёт силы Архимеда при определении массы тела путем взвешивания; введение поправок, учитывающих вращение Земли (сила Кориолиса) при расчёте траектории и т.п.

2. Погрешности известной природы, величина которых неизвестна. К их числу относятся уже упоминавшиеся погрешности приборов. Для каждого прибора или инструмента, как правило, известна лишь максимально возможная величина погрешности, а не конкретное её значение.

3. Скрытые погрешности, о существовании которых мы не подозреваем, хотя величина их может быть значительной. Это наиболее опасный вид систематических погрешностей. Характерным примером является определение плотности тела, в котором содержатся небольшие пустоты. Одним из способов выявления скрытых погрешностей является проведение измерений другим методом (в рассмотренном примере следует взять другое тело из того же материала).

4. Погрешности, обусловленные самим методом измерения. Например, вследствие приближённого характера используемых формул, полученных из упрощённой теоретической модели.

Выявление всех видов систематических погрешностей является весьма сложной задачей, которая требует тщательного анализа, условий эксперимента, применяемой теории, методики измерений, проведения измерений другими независимым способами и т.д. В программу лабораторного практикума входит нахождение и учёт главным образом только приборных погрешностей.

Предположим, что мы многократно измеряем некоторую физическую величину, причем все измерения выполняются одинаковым образом и внешние условия неизменны. Допустим, что при этом нам полностью удалось исключить систематические погрешности. Казалось бы, что результаты всех измерений должны дать одинаковое значение физической величины, которое и является её истинным значением. На самом же деле результаты одинаковых измерений окажутся различными. Они будут испытывать малые отклонения от истинного значения, причем величина и знак отклонения будут меняться от опыта к опыту случайным образом. Погрешности такого вида называются случайными.

Появление случайных погрешностей обусловлено большим числом малых воздействий. Например, на результат измерения могут повлиять колебания температуры, плотности воздуха, изменения внешних электрических и магнитных полей, вибрации и множество других причин, учесть которые невозможно. Эти воздействия и вызывают нерегулярные, неконтролируемые, случайные изменения результатов одинаковых измерений.

Определить величину случайной погрешности в отдельном измерении невозможно. Однако для серии измерений существует определённые статистические закономерности, которые хорошо изучены в теории вероятностей. Используя специальную методику расчёта, по результатам серии измерений можно вычислить величину случайной погрешности.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СЕРИИ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть произведено n одинаковых измерений некоторой величины и получен следующий ряд значений:

$$x_1,\ x_2, x_3, \ldots,\ x_n \qquad (3.1)$$

Будем считать, что систематические погрешности исключены, тогда полученные значения являются случайными величинами. В общем случае все они различны между собой и отличаются от истинного значения из-за наличия случайной погрешности. Для наглядного представления результатов данных измерений можно построить так называемую гистограмму (рис.3.1). Техника её построения проста. Здесь диапазон значений от x_{min} до x_{max} разбивается на k (10 ÷ 15) разных интервалов шириной $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/k$ и подсчитывается число измерений из полученного ряда (3.1), попадающих в каждый из k - интервалов:

$$\Delta n_1, \Delta n_2, \ldots, \Delta n_k \qquad (3.2)$$

Вверх от оси x откладываются прямоугольники шириной Δx и высотой $\Delta n_i/(n\cdot\Delta x)$. Полученная таким образом ступенчатая фигура называется гистограммой.

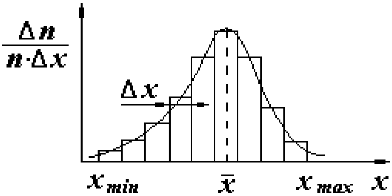


Рис. 3.1

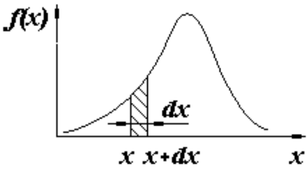


Рис. 3.2

Если через точки гистограммы, соответствующие срединам выбранных интервалов, провести плавную кривую, получим приближённый график (рис.3.1). Он показывает относительное число измерений $\Delta n_i/(n\cdot\Delta x)$ приходящееся на единицу ширины каждого интервала, как функцию величины x . В предельном случае ($n \to \infty$; $\Delta x \to 0$) приближенный график перейдет в точный график некоторой функции $f(x)$ - рис. 3.2. Функция $f(x)$ называется плотностью распределения случайных измерений. Произведение $f(x)dx$ (заштрихованная площадь на рис. 3.2) задаёт вероятность того, что при измерении величина x будет принимать какое-нибудь значение из интервала (x; $x + dx$). Полная площадь под кривой $f(x)$ определяет вероятность того, что измеренная величина x примет какое-то значение из интервала (- ∞; + ∞). Такое событие является достоверным, вероятность его равна единице, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = 1 \qquad (3.3)$$

Выражение (3.3) называется условием нормировки функции $f(x)$.

Конкретный вид функции $f(x)$, вообще говоря, может быть различным. Однако для подавляющего большинства простых измерений в науке, технике и массовом производстве хорошо выполняется так называемый нормальный закон распределения или закон Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (3.4)$$

Соответствующий график изображен на рис. 3.3, он представляет собой симметричную колоколообразную кривую. Функция *f(x)* характеризуется двумя параметрами: величиной $\bar{x}$, соответствующей максимуму кривой (это теоретическое истинное значение) и шириной кривой 2σ на 0,6 её высоты. Параметр σ определяет величину разброса результатов измерений относительно истинного значения и называется средним квадратичным отклонением. Чем больше величина σ, тем больше вероятность заметных отклонений результатов измерений от истинного значения $\bar{x}$ (рис. 3.3). Таким образом, параметр σ характеризует качество данных измерений.

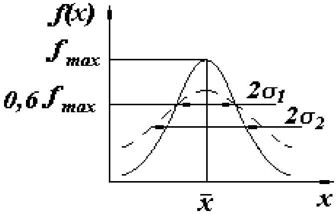


Рис. 3.3

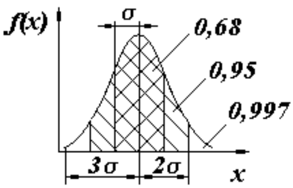


Рис. 3.4

Как уже отмечалось, площадь под кривой *f(x)* принимается равной единице. Площадь под кривой, соответствующая некоторому интервалу на оси *x*, определяет вероятность попадания результата измерения в данный интервал. Площадь под кривой *f(x)* в интервале значений ($\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma$) составляет около 0,68 (рис. 3.4). Это означает, что в среднем 68 процентов произведенных измерений попадают в "односигмовый" интервал около истинного значения. Аналогично в "двухсигмовый" интервал ($\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma$) попадает в среднем 95% всех измерений, а в "трёхсигмовый" - 99,7%, т.е. за его предела выходит ничтожная доля всего числа измерений. По этой причине измеренное значение можно считать промахом и отбросить, если оно выходит за пределы "трёхсигмового"интервала. Это правило является приближённым, более точная методика определения промахов приведена в приложении.

Интервал, в который заключено истинное значение измеряемой величины, называется доверительным интервалом, а вероятность, что истинное значение попадает в доверительный интервал, называется доверительной вероятностью, или надёжностью. Например, если доверительный интервал принять равным "односигмовому", то доверительная вероятность для него будет равна 68%, для "двухсигмового" она составит 95%, для "трёхсигмового" - 99,7%.

Надежность результат, измерения, равная 95%, при "двухсигмовом" доверительном интервале для большинства практически проводимых расчетов является вполне достаточной. Это же значение будет использоваться и в нашем лабораторном практикуме.

Число измерений случайной величины x в том или ином эксперименте, как правило, ограничено, поэтому определить точные значения σ и x невозможно. Однако в теории вероятностей и математической статистике существует методика, позволяющая по результатам серии из n - измерений (называемых выборкой) находить приближенные оценки параметров x и σ /1,2/. Так, в качестве приближенной оценки истинного значения принимают среднее арифметическое для серии из n - измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

А в качестве приближенной опенки среднего квадратичного отклонения однократного измерения от истинного значения используется выражение

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

Если получить m серий, каждая из которых содержит по n измерений, то по формуле (3.5) можно рассчитать ряд средних арифметических значений:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$$

Данные значения будут отличаться друг от друга и от истинного значения в силу ограниченного числа измерений в серии. Этот ряд случайных величин также распределен по нормальному закону около истинного значения. Причем дисперсия распределения средних арифметических $\sigma_{\bar{x}}$ меньше дисперсии однократного измерения σ, т.к. среднее значение является лучшей оценкой истинного, чем результат однократного измерения. Теория даёт следующее выражение для оценки среднего квадратичного отклонения среднего арифметического от истинного значения / 1,2 /:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.7)$$

Из формулы (3.7) видно, что случайную погрешность среднего значения можно уменьшить, увеличивая число измерений в серии.

Конечная цель измерения состоит в том, чтобы определить доверительный интервал, внутри которого с заданной доверительной вероятностью (0,95 в нашем случае) находится истинное значение физической величины x, т.е. записать результат измерения в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (3.8)$$

Выражение (3.8) означает, что истинное значение измеряемой величины находится где-то внутри интервала ($\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x$) с заданной доверительной вероятностью.

Как уже отмечалось, приближенная оценка дисперсии $\sigma_{\bar{x}}$ отличается от истинного значения дисперсии из-за ограниченного числа измерений в серии. Это отличие будет тем больше, чем меньше число измерений в серии. По этой причине нельзя принять доверительный интервал просто равным "двухсигмовому" - $2\sigma_{\bar{x}}$ для используемой нами доверительной вероятности 0,95. Необходимо еще внести поправку, зависящую от числа измерений и расширяющую доверительный интервал. Для этой цели используются так называемые коэффициенты Стьюдента - $t_{\alpha n}$, приводимые в таблицах (см.приложение) для разного числа измерений n при различных доверительных вероятностях α . С учетом коэффициента Стьюдента ширина доверительного интервала Δx вычисляется по формуле

$$\Delta x = t_{\alpha n} \cdot \sigma_{\bar{x}} = t_{\alpha n} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.9)$$

Величина Δx , определенная по (3.9), характеризует абсолютное отклонение результата измерения от истинного значения и называется абсолютной погрешностью. Абсолютная погрешность еще не дает полного представления о точности проведенных измерений. Например, абсолютная погрешность при измерении двух временных интервалов в 100 с и 10 с оказалась одинаковой и равной 1 с, ясно однако, что точность этих измерений различна. Оценить её можно, рассчитав относительную погрешность по формуле

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (3.10)$$

Относительная погрешность показывает, какую долю составляет абсолютная погрешность от результата измерения и обычно выражается в процентах. В нашем примере для интервала в 100с относительная погрешность составляет 1%, для интервала в 10с - 10%, т.е. точность первого измерения существенно выше.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИБОРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ И ОБЩЕЙ ПОГРЕШНОСТИ В СЛУЧАЕ ПРЯМОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Приборные погрешности, являющиеся одним из видов систематических погрешностей, принципиально неустранимы и должны быть учтены при окончательной записи результата измерения.

В зависимости от величины погрешности измерительные приборы подразделяются на семь классов точности: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4. Классом точности прибора называется выраженное в процентах отношение абсолютной максимальной погрешности прибора ($\Delta x_{пр}$) к верхнему пределу его измерения (x_{max}).

$$Кл.точн. = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{\max}} \cdot 100\% \qquad (4.1)$$

Приборы класса 0,1; 0,2; 0,5 используются для точных измерений и называются прецизионными. В технике применяются приборы классов 1,0; 1,5; 2,5; 4. Более грубые приборы обозначения класса точности не имеют. Класс точности прибора обычно указывается на его шкале и в паспортных данных.

Зная класс точности, можно легко определить максимальную приборную погрешность, возникавшую при измерениях данным прибором.

$$\Delta x_{пр} = \frac{Кл.точн. \cdot x_{\max}}{100} \qquad (4.2)$$

Завод-изготовитель с помощью класса точности гарантирует лишь верхний предел приборной погрешности, т.е. её максимальное значение. Это значение $\Delta\, x_{пр}$, мы вынуждены считать постоянным по всей шкале, конкретная же величина погрешности данного прибора неизвестна.

Итак, приборная погрешность одинакова для всех значений измеряемой величины от начала до конца шкалы прибора. Однако относительная погрешность при измерении в начале шкалы будет значительно больше, чем в конце шкалы. По этой причине рекомендуется выбирать прибор или предел его измерения так, чтобы стрелка отклонялась почти на всю шкалу. В этом случае прибор будет обеспечивать свою паспортную точность.

Если для прибора или инструмента отсутствуют данные о его классе точности, то максимальную приборную погрешность следует принять равной цене наименьшего деления шкалы этого прибора. Указанное правило связано с тем, что градуировка приборов обычно производится так, чтобы одно деление шкалы содержало от половины до целого значения величины $\Delta\, x_{np}$. Так, приборную ошибку линейки с миллиметровыми делениями следует считать равной 1 мм, приборная ошибка секундомера, деления которого нанесены через 0,2с, составит 0,2с и т.д.

В том случае, если погрешность измерения какой-либо величины складывается из нескольких погрешностей ($\Delta\, x_1$, $\Delta\, x_2$, ..., $\Delta\, x_m$), вносимых разными независимыми причинами, то теория погрешностей дает следующий закон их сложения /1,2/:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_m^2} \qquad (4.3)$$

Общая погрешность прямого измерения состоит из случайной и приборной погрешностей. Для того, чтобы избежать не учитываемое изменение доверительной вероятности конечного результата, следует определить доверительные интервалы этих ошибок с одинаковой вероятностью. Как следует из вышеизложенного, приборная погрешность имеет высокую доверительную вероятность, приближающуюся к единице. Истинный же закон распределения приборных ошибок в партии приборов данного типа неизвестен. Один из возможных способов оценки суммарной погрешности в этом случае заключается в следующем /1/. Полагают, что закон распределения приборных погрешностей близок к нормальному. Тогда величина $\Delta\, x_{np}$ примерно соответствует "трёхсигмовому" интервалу. Доверительный интервал для используемой нами надёжности результата 0,95 равен "двухсигмовому', т.е. он составляет $2\cdot\Delta\, x_{np}\,/3$. Воспользовавшись правилом (4.3), найдём общую погрешность прямого измерения в виде

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{сл}^2 + \left(\frac{2}{3}\Delta x_{пр}\right)^2} \qquad (4.4)$$

Следует иметь в виду, что складывать приборную и случайную погрешности по формуле (4.4) имеет смысл лишь в том случае, если они различаются меньше чем в три раза. Если же одна из погрешностей больше другой в три и более раз, её и следует принять в качестве меры общей погрешности. Действительно, пусть, например, $\Delta x_{сл} > \frac{2}{3}\Delta\, x_{пр}$ в три раза, тогда Δx отличается от $\Delta x_{сл}$ всего на 5%, этим отличием можно пренебречь и сразу положить $\Delta x = \Delta x_{сл}$.

Экспериментатор должен стремиться к тому, чтобы случайная погрешность была меньше приборной и не вносила вклад в общую погрешность. Так, в приведенном примере следовало бы увеличить число измерений для уменьшения $\Delta x_{сл}$. Однако на практике не всегда удаётся провести достаточно большое число измерений и приходится пользоваться правилом сложения (4.4).

5. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В большинстве измерений в науке и технике искомую физическую величину не удаётся измерить непосредственно, а приходится рассчитывать по формулам, в которые в качестве одной или нескольких переменных входят величины, измеряемые с помощью приборов. Такие измерения, как уже отмечалось, называются косвенными. Рассмотрим методику расчёта погрешностей для случая косвенных измерений.

Допустим, необходимо определить некоторую физическую величину f , которая связана функциональной зависимостью с величинами $u, v, w, \ldots$.

$$f=f(u,\ v,\ w,\ldots) \qquad (5.1)$$

Величины $u,\ v,\ w, \ldots$ измеряются непосредственно с помощью приборов. Пусть было проведено по n - измерений каждой из величин $u, v, w, \ldots$ и получены следующие результаты:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$
$$v_1, v_2, \ldots, v_n$$
$$w_1, w_2, \ldots, w_n \qquad (5.2)$$

Результаты прямых измерений (5.2) были обработаны согласно правилам, изложенным в разделе 3 и 4, и определены средние значения и соответствующие им погрешности:

$$\bar{u} \pm \Delta u\,; \qquad \bar{v} \pm \Delta v\,; \qquad \bar{w} \pm \Delta w\,; \tag{5.3}$$

Наилучшей оценкой истинного значения искомой величины f является её среднее значение $\bar{f}$. Для нахождения $\bar{f}$ необходимо в формулу (5.1) подставить средние значения прямо измеренных величин:

$$\bar{f} = f(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \ldots) \tag{5 4}$$

Очевидно, что величина получена с некоторой погрешностью Δf. Погрешность Δf при косвенном измерении зависит от погрешностей прямо измеренных величин и вида функциональной зависимости (5.1).

Если прямые измерения проведены независимыми способами и относительные погрешности δu, δv, δw,...невелики, то теория погрешностей даёт следующую формулу для нахождения погрешности /1 - 3/:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\Delta v\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\Delta w\right)^2 + \ldots} \tag{5.5}$$

где $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$,.... - частные производные от функции (5.1), которые вычисляются при $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$, $w = \bar{w}$,....

Часто зависимость (5.1) имеет степенной вид

$$f = A \cdot u^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot w^{\gamma} \ldots \tag{5.6}$$

где A - некоторая константа; α, β, γ показатели степени (целые или дробные, положительные или отрицательные). В этом случае для расчета Δf удобнее использовать формулу

$$\Delta f = \bar{f} \cdot \sqrt{\alpha^2\left(\frac{\Delta u}{\bar{u}}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\Delta v}{\bar{v}}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{\Delta w}{\bar{w}}\right)^2 + \ldots} \tag{5.7}$$

Поясним, как получается формула (5.7). Для этого предварительно прологарифмируем,(5. 6)

$$\ln f = \ln A + \alpha \ln u + \beta \ln v + \gamma \ln w \tag{5.8}$$

Известно, что $\frac{\partial(\ln f)}{\partial u} = \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$, отсюда получаем

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f\,\frac{\partial(\ln f)}{\partial u} \qquad (5.9)$$

Вычислив частную производную подставив её в (5.9), получим

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f\cdot\alpha\cdot\frac{1}{u} \qquad (5.10)$$

Далее, заменяя в; (5.5) частные производные выражениями вида (5.10) придем к формуле (5.7).

Рассмотрим пример. Дана функция $f = \dfrac{u^2+v}{2w}$; $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, Δu, Δv,Δw - средние значения и прямые погрешности измеренных величин *u, v* и *w* . Найти формулу для расчета погрешности Δf.

Для нахождения Δf применим правило (5.6), предварительно вычислив частные производные функции *f:*

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u}{2w} = \frac{u}{w};\quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2w};\quad \frac{\partial f}{\partial w} = -\frac{u^2+v}{2w^2}$$

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\bar{u}}{\bar{w}}\Delta u\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{2\bar{w}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{u}^2+\bar{v}}{2\bar{w}^2}\right)^2\cdot\Delta w^2}$$

Пусть функция f имеет другой вид: $f = \dfrac{u^2 v}{2w}$. В этом случае, используя правило (5.7), запишем:

$$\Delta f = \bar{f}\cdot\sqrt{4\left(\frac{\Delta u}{\bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\bar{v}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{\bar{w}}\right)^2};\qquad \bar{f} = \frac{\bar{u}^2\cdot\bar{v}}{2\bar{w}}$$

6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

I. Рабочую формулу для искомой величины преобразовать так, чтобы в неё входили непосредственно измеряемые величины – *u, v, w*,…

$$f = f(u, v, w, \ldots) \qquad (6.1)$$

2. По результатам прямых измерений величин *u, v, w*,… (см. (5.2) рассчитать средние значения:

$$\bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i\ ;\quad \bar{v}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}v_i\ ;\quad \bar{w}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}w_i \qquad (6.2)$$

3. Рассчитать среднее значение искомой величины

$$\bar{f}=f(\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w},\ldots) \qquad (6.3)$$

4. Определить по классу точности, или цене наименьшего деления приборные погрешности непосредственно измеряемых величин:

$$\Delta u_{пр}, \Delta v_{пр}, \Delta w_{пр}, \ldots \qquad (6.4)$$

5. Для каждой из величин u, v, w, … определить величину случайной погрешности с доверительной вероятностью 0,95. Например , для величины u рассчитаем

$$\Delta u_{сл}=t_{\alpha\cdot n}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{u}-u_i)^2}{n(n-1)}} \qquad (6.5)$$

6. Сравнить случайную и приборную погрешности и определить полную погрешность каждого прямого измерения - Δu, Δv, Δw, … При этом возможны три случая, рассмотрим их на примере величины u.

Если $\Delta u_{пр} > \Delta u_{сл}$ в три и более раз, то полагаем, что $\Delta u \approx \Delta u_{пр}$

Если $\Delta u_{сл} > \Delta u_{пр}$ в три и более раз, "то полагаем, что $\Delta u \approx \Delta u_{сл}$

В этом случае погрешность $\Delta u_{сл}$ можно уменьшить, увеличивая число измерений n .

Если случайная погрешность и приборная погрешность сравнимы по величине $\Delta u_{сл} \approx \Delta u_{пр}$, то следует их сложить по правилу

$$\Delta u=\sqrt{\Delta u_{сл}^2+\left(\frac{2}{3}\Delta u_{пр}\right)^2} \qquad (6.6)$$

7. Рассчитать погрешность косвенного измерения Δf по формуле (5.5). Если рабочая формула (6.1) имеет степенной вид, то для расчета Δf использовать формулу (5.7).

6. Окончательный результат измерения записать в следующем виде (с указанием величины относительной погрешности):

$$f=\bar{f}\pm\Delta f\ ;\quad \delta f=\frac{\Delta f}{f}\cdot 100\% \qquad (6.7)$$

7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА. ЗАПИСЬ ОКОНЧАТЕЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В результате измерений прямых или косвенных, как уже отмечалось, получаются приближённые числа. Цифры, составляющие приближённое число, могут быть верными, сомнительными и неверными / 3 /. Цифра называется верной, если абсолютная погрешность числа меньше одной единицы разряда этой цифры. Цифры, стоящие слева от верной, также будут верными. Цифра называется сомнительной, если её разряд совпадает с разрядом первой значащей цифры погрешности. Все цифры, стоящие справа от сомнительной, будут неверными. Так в числе 381,6±1цифры 3 и 8 - верные, 1 - сомнительная, 6 - неверная.

При проведении вычислений в лабораторных работах исходными данными служат результаты прямых измерений, последняя цифра в них обычно является сомнительной. Кроме того, в вычислениях используются табличные данные и различные физические постоянные. Следует отметить, что числа, взятые из таблиц, содержат только верные цифры, а за погрешность табличных данных, если она не указана, принимают ±0,5 разряда последней значащей цифры.

Основное требование, предъявляемое к расчёту, заключается в том, чтобы проводимые вычисления не вносили в результат дополнительной погрешности. При использовании в расчёте вычислительной техники это требование обычно выполняется, однако окончательный результат и его абсолютная погрешность содержат много цифр.

Необходимо помнить, что <u>запись приближённых чисел с излишне большим количеством знаков создаёт лишь иллюзию высокой точности.</u>

Точность определения погрешности описанными выше способами составляет 20-30% и указывать её с большей точностью бессмысленно. Поэтому при окончательной записи результата необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. Абсолютную погрешность следует округлить до одной значащей цифры.

2. Результат округлить так, чтобы его последняя цифра находилась в том же разряде, что и единственная значащая цифра погрешности.

3. Общий десятичный множитель результата и погрешности вынести за скобки.

Приведём несколько примеров окончательной записи результатов.

<u>Неправильно</u> <u>Правильно</u>

(534,031 ± 0,043) м	(534,03 ± 0,04) м
(14,275 ± 1,17) В	(14 ± 1) В.
(1587 ± 281,6) с	$(16 \pm 3)\cdot 10^{2}$ с
$(1{,}965\cdot 10^{-19} \pm 3{,}81\cdot 10^{-21})$ Кл	$(1{,}96 \pm 0.04)\ 10^{-19}$ Кл

8. ГРАФИКИ И ТАБЛИЦЫ

В физике и технике результаты измерений очень часто изображают в виде графических зависимостей. Графики дают наглядное представление о полученных результатах, позволяют графически определить некоторые величины, сравнить эксперимент и теорию. Рассмотрим основные правила построения графиков (см./4/).

1. Графики следует строить на миллиметровой бумаге или бумаге в клетку, лучше это делать карандашом. Каждый график должен иметь заголовок. Оси координат проводят по линейке и на них через равные промежутки наносят масштабные метки. Расстояние между метками по оси абсцисс и ординат можно выбирать различным.

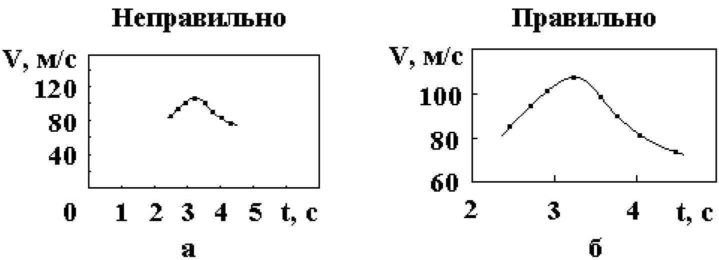


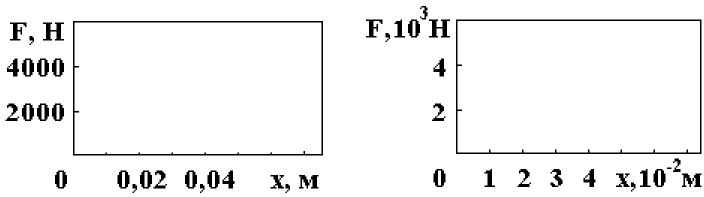
Рис. 8.1

2. Выбирать масштаб необходимо так, чтобы экспериментальные точки не сливались друг с другом, и чтобы из графика можно было получить максимум полезной информации. Так, на рис. 8.1,б масштаб выбран верно в отличие от рис. 8.1,а. Заметим, что начало координат не обязательно должно совпадать с "нулём", кроме тех случаев, когда это необходимо.

3. Масштаб должен быть простым. Лучше, если 1 см на графике соответствует I; 2; 4; 5; 10; 20 ... или 0,1; 0,2;

0,4; 0,5 ... и т.д. единицам измеренной величины. В противном случае при нанесении точек на график придётся производить специальные подсчёты.

Неправильно **Правильно**



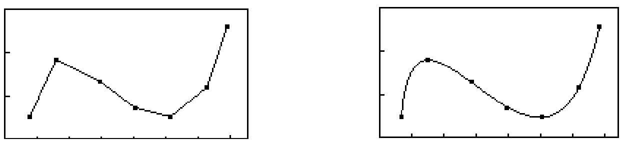
а **б**

Рис. 8.2

4. Писать числа у каждой масштабной метки, если числа начинают сливаться, не следует (см. ось ординат, рис. 8.1,а), но наносить их нужно обязательно через равные промежутки. Никакие другие числа на координатные оси не наносят. Кроме масштаба на координатных осях необходимо указать буквами соответствующую физическую величину и единицу её измерения, а десятичный множитель удобнее отнести к единице измерения (см.рис. 8.2).

5. Экспериментальные точки обязательно наносят на график. Точки, относящиеся к разным зависимостям, обозначают разными значками (точкой, кружком, крестиком и т.д.). Если зависимость носит явно нелинейный характер, то соединять точки следует "наилучшей" плавной кривой (см. рис. 8.3).

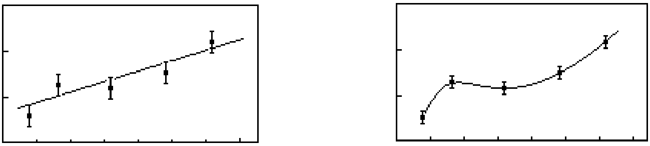
Неправильно **Правильно**



а **б**

Рис. 8.3

6. Для правильного построения графика кроме экспериментальных точек полезно указать погрешность в виде вертикальных и горизонтальных отрезков, равных по величине абсолютной погрешности. Например, на рис.8.4,а экспериментальную зависимость можно изобразить прямой, т.к. она пересекает все погрешностные отрезки в отличие от рис. 8.4,б.



а **б**

Рис. 8.4

Цифровые данные, полученные в лабораторных работах, заносят в таблицы. Рассмотрим основные правила оформления таблиц (подробнее см. ГОСТ 7.32 - 81).

1. Таблицы следует чертить по линейке. Каждая таблица обязательно должна иметь заголовок. Заголовок и слово "Таблица" начинают с прописной буквы.

2. В заголовке таблицы указывают буквенное обозначение величины и единицы измерения через запятую.

3. Делить заголовки таблицы по диагонали не допускается, в заголовке также не следует писать формулы.

4. Писать в таблице кавычки вместо повторяющихся цифр или знаков не допускается.

5. Общий десятичный множитель чисел, помещенных в таблице, следует вынести в заголовок таблицы.

6. Для единичного значения величины графа не отводится. Эту величину можно указать в примечании к таблице.

7. Графу "№ п.п." в таблицу включать не следует.

Примеры неправильного и правильного, оформления таблиц приведены ниже.

неправильно

№	U=I·R (В)	R (Ом)	σ	Δ, $м^{-1}$
I	4,0	3000	0,001	0,01
2	4,5	3500	0,002	
3	4,6	3600	0,001	
4	-"-	3700	0,0003	
5	-"-	3800	0,005	
6	-"-	3900	0,006	

правильно

Таблица 2

Параметры электрической цепи

U, В	$R \cdot 10^{-3}$, Ом	$\sigma \cdot 10^{3}$, $м^{-1}$
4,0	3,0	1,0
4,5	3,5	2,0
4,6	3,6	1,0
4,6	3,7	0,3
4,6	3,8	5,0
4,6	3,9	6,0

Примечание:
Δ =0,01 м$^{-1}$

9. ПОСТРОЕНИЕ НАИЛУЧШЕЙ ПРЯМОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ТОЧКАМ

Часто в эксперименте измеряются две физические величины x и y , про которые известно, что они связаны линейной зависимостью вида

$$y = ax + b \qquad (9.1)$$

Угловой коэффициент a равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс ($a = \Delta x/\Delta y$), b - это отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат (рис. 9.1). Целью эксперимента является косвенное измерение параметров линейной зависимости a и b, зная которые, можно рассчитать некоторые физические величины.

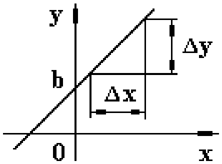


Рис. 9.1

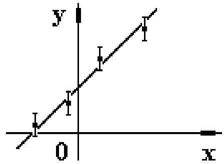


Рис. 9.2

Так, например, сила тока в проводнике, согласно закону Ома, линейно связана с приложенным напряжением

$$I = \frac{1}{R} \cdot U$$

где $a = (1/R)$, $b = 0$. Измерив несколько пар значений I и U, можно построить экспериментальную прямую и определить a. Затем, зная длину проводника - l и площадь поперечного сечения - S , можно рассчитать удельное сопротивление материала проводника $\rho = R \cdot S / l$.

Пусть было проведено n измерений величин x и y , связанных линейной зависимостью (9.I), и получен ряд экспериментальных точек:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2,), ..., (x_n, y_n) \qquad (9.2)$$

Результаты измерений, как известно, неизбежно содержат погрешности, поэтому экспериментальные точки не лягут вдоль одной прямой (рис.9.2). В связи с этим возникает задача: как наиболее правильно провести прямую линию по экспериментальным точкам, т.е. как наиболее точно определить параметры линейной зависимости a и b. Эта задача может быть решена <u>методом наименьших квадратов</u>, суть которого сводится к тому, чтобы достичь минимальной суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от проведенной прямой. Подробно метод наименьших квадратов рассмотрен в / 2 /. Мы остановимся лишь на конечных результатах. Эти результаты получены в предположении, что погрешность измерения величины x много меньше погрешности величины y ($\Delta x \ll \Delta y$), т.к. данный случай часто реализуется на практике.

Для нахождения параметров a и b следует предварительно вычислить следующие суммы:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i ; \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 ; \qquad S_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i ; \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{9.3}$$

После этого величины a и b определяют по формулам:

$$a = \frac{n \cdot S_4 - S_1 \cdot S_3}{n \cdot S_2 - S_1^2}, \qquad b = \frac{S_2 \cdot S_3 - S_1 \cdot S_4}{n \cdot S_2 - S_1^2}. \tag{9.4}$$

Среднеквадратичные отклонения величин a и b рассчитываются следующим образом / 2 /:

$$\sigma_a^2 = \frac{n \cdot \sigma_y^2}{n \cdot S_2 - S_1^2}, \qquad \sigma_b^2 = \frac{\sigma_y^2 \cdot S_2}{n \cdot S_2 - S_1^2}, \tag{9.5}$$

где

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - b - a x_i)^2 \tag{9.6}$$

Методом наименьших квадратов могут быть обработаны и более сложные зависимости. Для этого они приводятся к линейному виду (линеаризуются).

Например: определить постоянную радиоактивного распада λ и первоначальную активность A_0 некоторого вещества, если имеется набор данных ($A_1, t_1; A_2, t_2; \ldots, A_i, t_i; \ldots, A_n, t_n$) , где A_i - активность этого вещества в момент времени t_i. Известно, что изменение активности вещества в зависимости от времени определяется соотношением

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Для того, чтобы привести данное выражение к линейному виду, прологарифмируем его $\ln A = \ln A_0 - \lambda \cdot t$

Введём обозначения: $\ln A = y$; $\ln A_0 = b$; $t = x$; $-\lambda = a$. После этого получим линейную, зависимость вида (10.1) $y = ax + b$. Далее методом наименьших квадратов определим a и b и с учётом введённых обозначений рассчитываем A_0 и λ.

10. ОБНАРУЖЕНИЕ ПРОМАХОВ

Для обнаружения промахов в серии измерений случайных величин существует специальная методика /I/. Пусть проведено n измерений случайной величины x и получена серия значений:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

Допустим, что среди данных значений имеется некоторое значение x_k сильно отличающееся от остальных. Для выяснения вопроса является ли x_k промахом, поступают следующим образом.

1. Вычисляют среднее арифметическое $\bar{x}$ и среднюю квадратичную погрешность σ из всех измерений, включая подозрительное.

2. Вычисляют относительное уклонение подозрительного измерения от среднего арифметического, выраженное в долях средней квадратичной ошибки

$$\theta = \left| \frac{\bar{x} - x_k}{\sigma} \right|$$

3. В таблице 3 приведены максимально возможные значения θ_{max} для различного числа измерений n при доверительной вероятности 0,95. Если расчетное значение θ для подозрительного измерения x_k больше максимального - θ_{max}, то значение x_k с вероятностью 0,95 следует считать промахом.

Таблица 3

Значение θ_{max} вероятности 0,95

n	3	4	5	6	7	8	9
θ_{max}	1,41	1,69	1,87	2,00	2,09	2,17	2,24
n	10	12	15	20	30	40	50
θ_{max}	2,29	2,39	2,49	2,62	2,79,	2,90	2,99

Таблица 4

Коэффициенты Стьюдента при вероятности 0,95

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{\alpha n}$	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23
n	11	12	13	14	15	20	25	30	40
$t_{\alpha n}$	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,09	2,06	2,04	2,02

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. - Л.: Наука, 1974,- 108 с.
2. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок (пер. с англ.). – М.: Мир, 1985,- 272 с.
3. Кондрашов А.П., Шестопалов Е.В. Основы Физического эксперимента и обработка результатов измерений. - М.: Атомиздат, 1977,- 197 с.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика (пер. с англ.). - М.: Мир, 1971,- 264 с.

Обработка данных физического эксперимента
Методические указания к лабораторным работам

Составители: *А. П. Ринчинов*
Э. Л. Санеев

Рецензент *В. Б. Шагдаров*

Редактор *Т. А. Стороженко*

Подписано в печать 06.10.2003г. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. п.л. 2,56.
Уч.-изд. л. 2,2.
Тираж 100 экз. Заказ 135.

Издательство ВСГТУ, Улан-Удэ, Ключевская, 40в, стр. 1.