Лабораторная работа №1

Физические измерения и вычисление их погрешностей

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Ознакомление с некоторыми методами физических измерений и вычисление погрешностей измерений на примере определения плотности твердого тела правильной формы.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Металлический цилиндр, штангенциркуль, микрометр, весы.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Физическое измерение – сравнение измеряемой величины с эталоном (единицей измерения).

Измерения классифицируют по различным признакам. По способу получения числового результата все измерения делят на *прямые* и *косвенные*.

Прямые измерения – измерения, результат которых получают непосредственно с помощью меры или измерительного прибора:

$$x = A$$

Косвенные измерения – измерения, результат которых определяют на основе прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной некоторой зависимостью:

$$x = f(A, B, C)$$

Например, к прямым измерениям относят измерение массы m на весах, измерение высоты цилиндра h или его диаметра D; к косвенным измерениям можно отнести *измерение плотности* твердого тела цилиндрической формы:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 h} = \frac{4m}{\pi \cdot D^2 h} \qquad (1)$$

Измерения по области применения делят на *технические* и *лабораторные*. *Технические измерения* производят сравнительно грубыми приборами без учета погрешностей; *лабораторные измерения* производят более точными приборами, при этом учитывают погрешности.

Точность измерений – характеристика, отражающая близость результатов измерений к истинному значению измеряемой величины. Высокая точность измерений соответствует малым погрешностям результата.

Погрешность

Под **погрешностью** понимают разность между точным (истинным) значением величины $x_{ист}$ и ее приближенным (измеренным) значением $x_{измер}$.

В физике точность измерений ставят в зависимость от цены деления шкалы или меры измерительного прибора. Под выражением "измерение произведено с точностью до сантиметра" понимают, что цена деления на шкале $1\ см$ и погрешность не превышает $1\ см$.

Деление шкалы прибора – это промежуток между двумя соседними отметками штрихами шкалы.

Цена деления шкалы – это значение измеряемой величины, соответствующее одному делению (2)

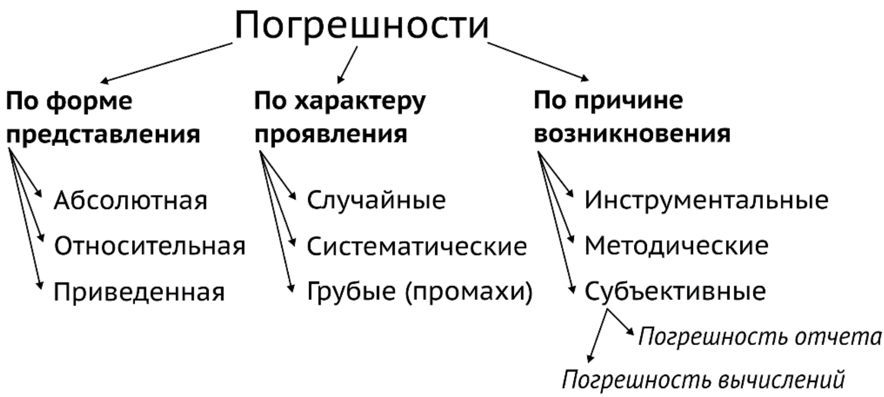
$$C = \frac{A}{n}, \qquad (2)$$

где A – диапазон шкалы;
n – число делений в данном диапазоне.

Чем меньше цена деления на шкале прибора, тем меньше абсолютная погрешность результата измерения, однако между ценой деления и абсолютной погрешностью нет численного равенства. Это объясняется тем, что точность измерения зависит не только от цены деления, но и от других причин.

Причины возникновения погрешностей:

1. непостоянство внешних условий;
2. неточность приборов измерения;
3. неполное соответствие объекта модели;
4. неточность метода измерений;
5. некорректные действия со стороны экспериментатора.



КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

По форме представления

Абсолютная погрешность — понимают разность между точным (истинным) значением величины $x_{ист}$ и ее приближенным (измеренным) значением $x_{измер}$:

$$\Delta x = x_{ист} - x_{измер} \tag{3}$$

Знак погрешности часто бывает несущественным. Поэтому за величину погрешности принимают *модуль* разности:

$$\Delta x = \left| x_{ист} - x_{измер} \right|$$

На практике истинное значение величины нам, как правило, не известно, поэтому вместо $x_{ист}$ берут *среднее значение величины* $x_{сред}$ (т.к., согласно математической статистике, $x_{сред}$ наиболее близко к $x_{ист}$):

$$\Delta x = \left| x_{сред} - x_{измер} \right| \tag{4}$$

Абсолютная погрешность является оценкой абсолютной ошибки измерения, поэтому абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина.

Абсолютную погрешность применяют для сравнения точности измерения величин *одного порядка и одной размерности*.

Например, значение силы тока в одной лампочке $1 \pm 0,5\ A$, а в другой – $10 \pm 0,5\ A$. Абсолютные погрешности обоих чисел одинаковы, однако очевидно, что погрешность $0,5\ A$ при значении силы тока $1\ A$ велика (50% измеряемой величины), для силы тока $10\ A$ погрешность $0,5\ A$ составляет лишь $5\ \%$.

Точно так же бессмысленно ставить вопрос о том, какое измерение более точное: измерение длины с точностью до *1 см* или измерение массы с точностью до *1 г*.

Для сравнения точности любых приближенных величин применяют понятие относительной погрешности.

Относительная погрешность — погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерений Δx к истинному значению $x_{ист}$ измеряемой величины:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{ист}} = \frac{\left|x_{ист} - x_{измер}\right|}{x_{ист}}$$

Относительная погрешность является *безразмерной величиной*, либо измеряется в *процентах*. Поэтому относительная погрешность позволяет *сравнивать разнородные величины*.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \cdot 100\% \qquad (5)$$

На практике формула (5) переходит в (6):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{сред}} \cdot 100\% \qquad (6)$$

где $x_{сред}$ – среднее значение величины.

Приведённая погрешность — погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины, постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Вычисляется по формуле

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{норм}} \cdot 100\%$$

где $x_{норм}$ – нормирующее значение, которое зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке:

1. Если шкала прибора односторонняя, то есть нижний предел измерений равен нулю, то $x_{норм}$ определяется равным верхнему пределу измерений;
2. Если шкала прибора двухсторонняя, то нормирующее значение равно ширине диапазона измерений прибора.

Приведённая погрешность является *безразмерной величиной*, либо измеряется в процентах.

По причине возникновения

Инструментальные (приборные) погрешности — погрешности, которые определяются погрешностями применяемых средств измерений и вызываются несовершенством принципа действия, неточностью градуировки шкалы, ненаглядностью прибора.

Обобщённой характеристикой средств измерения является **класс точности**, определяемый предельными значениями допускаемых основной и дополнительной погрешностей, а также другими параметрами, влияющими на точность средств измерения; значение параметров установлено стандартами на отдельные виды средств измерений.

Класс точности средств измерений характеризует их точностные свойства, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполняемых с помощью этих средств, так как точность зависит также от метода измерений и условий их выполнения.

Методические погрешности — погрешности, обусловленные несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики.

Субъективные (операторные, личные) погрешности — погрешности, обусловленные степенью внимательности, сосредоточенности, подготовленности и другими качествами оператора.

Одним из проявлений субъективных погрешностей можно отнести **погрешность отсчета**. Если стрелка-указатель совпала с каким-либо штрихом, то за отсчет принимают число, соответствующее этому штриху.

Если стрелка остановилась в промежутке между штрихами, то за отсчет принимают тот числовой штрих, к которому стрелка ближе, например *8*. За отсчет может быть принята также середина интервала между штрихами – *8,5*.

Во всяком случае, возможная погрешность отсчета равна половине цены деления.

Для секундомера карманного типа возможная погрешность равна не полцены деления, а всей цене деления, так как *секундная стрелка движется* по шкале от штриха к штриху *скачками*.

Невозможность остановки стрелки между штрихами и приводит к погрешности, равной *цене деления*.

По характеру проявления

Случайная погрешность — погрешность, меняющаяся (по величине и по знаку) от измерения к измерению.

Случайная погрешность является *невоспроизводимой* ошибкой. Легко видеть, что влияние случайных ошибок на результат измерений может быть существенно уменьшено при *многократном повторении опыта*.

Случайные погрешности могут быть связаны с несовершенством приборов (трение в механических приборах и т. п.), тряской в городских условиях, с несовершенством объекта измерений (например, при измерении диаметра тонкой проволоки, которая может иметь не совсем круглое сечение в результате несовершенства процесса изготовления), с особенностями самой измеряемой величины (например при измерении количества элементарных частиц, проходящих за единицу времени через счётчик Гейгера).

Систематическая погрешность — погрешность, изменяющаяся во времени по определённому закону (частным случаем является постоянная погрешность, не изменяющаяся с течением времени). Систематические погрешности могут быть связаны с ошибками приборов (неправильная шкала, калибровка и т. п.), неучтёнными экспериментатором.

Грубая погрешность (промах) — погрешность, возникшая вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры (например, если экспериментатор неправильно прочёл номер деления на шкале прибора или если произошло замыкание в электрической цепи).

Погрешности косвенных величин

Как уже отмечалось, косвенным называется измерение, при котором значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, найденными в результате прямых измерений.

При косвенных измерениях искомая величина Z определяется зависимостью

$$Z = f\left(A_1, A_2, A_3\right)$$

где A_1, A_2, A_3 – прямо измеряемые величины, являющиеся аргументами функции Z.

Обращаем внимание на то, что методы строгого анализа погрешности косвенных измерений отличаются значительной сложностью, поэтому мы используем упрощенный порядок расчета погрешностей.

Расчет погрешностей косвенной величины Z можно выполнить одним из двух способов.

Способ 1. Вначале определить абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial A_1}\right)^2 \Delta A_1{}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial A_2}\right)^2 \Delta A_2{}^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial A_3}\right)^2 \Delta A_3{}^2} \qquad (7)$$

или, если не учитывать знак погрешностей величин A_1, A_2, A_3

$$\Delta Z \approx \left(\frac{\partial Z}{\partial A_1}\right)\Delta A_1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial A_2}\right)\Delta A_2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial A_3}\right)\Delta A_3 \qquad (8)$$

где $\frac{\partial Z}{\partial A_1}, \frac{\partial Z}{\partial A_2}, \frac{\partial Z}{\partial A_3}$ – частные производные искомой функции Z

Для расчета частных производных необходимо использовать измеренные значения прямых величин A_1, A_2, A_3

$$A_1 \pm \Delta A_1, A_2 \pm \Delta A_2, A_3 \pm \Delta A_3$$

Затем определить относительную погрешность по формуле

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta Z}{Z}$$

Способ 2. Вначале определить относительную погрешность

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_1}\right)^2 \Delta A_1{}^2 + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_2}\right)^2 \Delta A_2{}^2 + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_3}\right)^2 \Delta A_3{}^2} \qquad (9)$$

или, если не учитывать знак погрешностей величин A_1, A_2, A_3

$$\Delta Z \approx \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_1}\right)\Delta A_1 + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_2}\right)\Delta A_2 + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial A_3}\right)\Delta A_3 \qquad (10)$$

Абсолютную погрешность вычислить по формуле

$$\Delta Z = \varepsilon_Z \cdot Z$$

Рассмотрим нахождение погрешностей по формуле (10) на примере определения относительной погрешности плотности $\rho = \frac{4M}{\pi \cdot D^2 h}$, т.е. $\rho = f(M, D, h)$

1. Прологарифмируем формулу для ρ :

$$\ln\rho = \ln\frac{4}{\pi}M - 2\ln D - \ln h$$

2. Продифференцируем:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} - 2\frac{dD}{D} - \frac{dh}{h}$$

3. Формально заменим все «–» на «+»:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dM}{M} + 2\frac{dD}{D} + \frac{dh}{h}$$

4. Перейдем бесконечно малых приращений к конечным, получим итоговую формулу *относительной погрешности*:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta M}{M} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} \qquad (11)$$

где $\Delta M, \Delta D, \Delta h$ – абсолютные погрешности прямых величин M, D, h, определяемых по (3), (4).

5. Найдем *абсолютную погрешность*

$$\Delta\rho = \varepsilon_{\rho}\cdot\rho \qquad (12)$$

Суммарная погрешность измерения

На основе сказанного можно сделать вывод, что в *простых, прямых лабораторных измерениях* можно оценивать следующие погрешности: инструментальную погрешность $\Delta_{инстр}$, погрешность отсчета $\Delta_{отсчет}$, а также случайную погрешность $\Delta_{случ}$. Источники других погрешностей могут и должны быть исключены.

Полная погрешность измерения равна сумме составляющих погрешностей (*простые, прямые измерения*):

$$\Delta = \Delta_{инстр} + \Delta_{отсчет} + \Delta_{случ}$$

При этом возможны следующие случаи:

1. $\Delta = \Delta_{инстр}$. Источников случайных погрешностей нет, а погрешность отсчета пренебрежимо мала по сравнению с инструментальной погрешностью.

   Инструментальная погрешность штангенциркуля равна точности измерения его нониуса, инструментальная погрешность штангенциркуля равна точности его нониуса, инструментальная погрешность микрометра равна точности измерения нониуса микрометра.

2. $\Delta = \Delta_{отсчет}$. Источников случайных погрешностей нет, а инструментальная погрешность пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью отсчета. С этим случаем встречаемся при измерении массы на весах.

3. $\Delta = \Delta_{случ}$. Случайная погрешность больше инструментальной и погрешности отсчета. Результат измерения получен методом среднего арифметического.

   Например, пять раз измерили длину пластинки микрометром и получили:

   $$l_1 = l_3 = l_4 = l_5 = 15{,}6\ мм \quad \text{и} \quad l_2 = 15{,}5\ мм$$

   $$l_{ср} = \frac{15{,}6 \cdot 4 + 15{,}5}{5} = 15{,}58\ мм$$

   В качестве погрешности принимают среднее отклонение отдельных результатов от среднего арифметического:

$$\Delta l_{cp} = \frac{0{,}02 \cdot 4 + 0{,}08}{5} = \frac{0{,}16}{5} \cong 0{,}03\ мм,$$

так как она превосходит инструментальную погрешность микрометра, равную 0,01 мм.

4. $\Delta = 0$

Измерение проведено с нулевой погрешностью. В этом случае погрешность измерения находится за пределами точности измерений.

Например, при измерении длины с точностью до 1 см погрешностью в 1 мм *пренебрегают*.

Измерение линейных размеров

Основным приборам для измерения длины служит *масштабная линейка* с нанесенными на ней делениями – обычно сантиметрами и миллиметрами.

Для повышения точности измерения до десятых или сотых долей миллиметра масштаб снабжают дополнительным устройством, называемым **нониусом**.

Применение нониуса *основано на свойстве человеческого глаза* точнее оценивать совпадение штрихов, нежели расстояние между несовпадающими штрихами.

Нониус представляет собой маленькую линейку, укрепленную на масштабной линейке и свободно передвигающуюся вдоль нее (**рис.1**).

Нониус разбит по всей длине на некоторое число делений *n* с таким расчетом, чтобы на такой же длине масштабной линейки укладывалось число делений на единицу меньше $(n-1)$ (**рис. 1а, б**).

Поэтому линейный размер деления нониуса (цена деления) оказывается несколько меньше цены деления масштабной линейки.

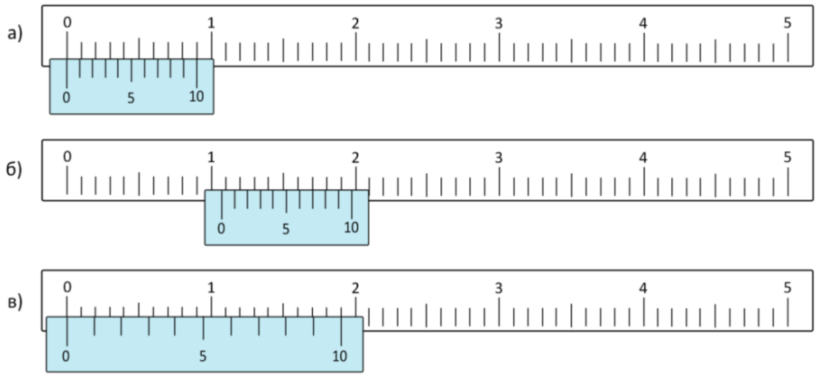


Рис.1. Примеры нониусов

Разность между ценой деления масштабной линейки и ценой деления нониуса, которую мы можем фиксировать, называется **точностью нониуса**.

Точность нониуса определяется следующим образом. Обозначим цену деления нониуса – B, цену деления масштаба – C, число делений нониуса – n, тогда $(n-1)$ число делений масштабной линейки, соответствующее всей длине нониуса. Тогда

$$n \cdot B = (n-1) \cdot C$$

$$B = \frac{(n-1) \cdot C}{n}$$

Так как точность нониуса равна $|C - B|$, то

$$C - B = C - \frac{(n-1) \cdot C}{n} = \frac{C}{n}$$

При достаточно мелких делениях масштаба деления нониуса делают более крупными (**рис.1б**). Тогда число делений нониуса n таково, что на такой же длине масштабной линейки укладывается $(2n-1)$ делений. При этом

$$(2n-1)\cdot C = n\cdot B\,; \qquad B=\frac{(2n-1)\cdot C}{n}$$

Точность нониуса в этом случае равна

$$2C-B=2C-\frac{(2n-1)\cdot C}{n}=\frac{C}{n}$$

Другими словами, *точность нониуса равна величине отношения цены деления масштабной линейки к числу делений нониуса*.

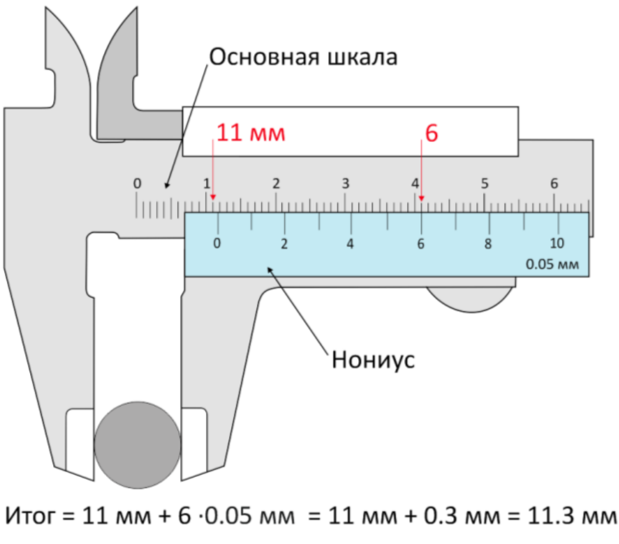


Рис. 2. Штангенциркуль

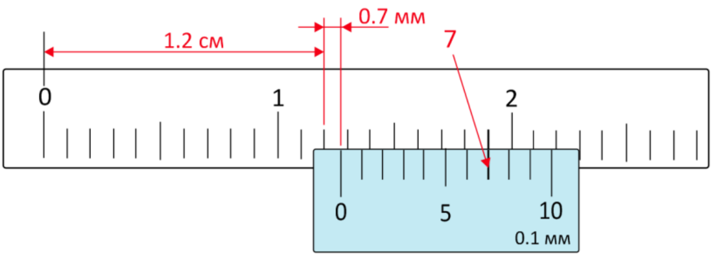
Нониусами снабжаются штангенциркули, теодолиты и многие другие приборы.

Для измерения линейных размеров предмета с помощью **штангенциркуля** его зажимают между клювовидными выступами (**рис. 2**).

Определение размеров с помощью нониуса

Сначала отсчитывают размер предмета в масштабных единицах по положению нулевого деления нониуса относительно деления масштабной линейки, например *1,2 см* (**рис. 3**).

Чтобы отсчитать доли, миллиметра, пользуются нониусом. Находят деление нониуса, совпадающее с каким-либо делением масштаба, и номер совпавшего деления нониуса – 7, точность нониуса – 0.1 мм, доли миллиметров, отсчитанные нониусом в этом случае – 0.7 мм.



Итог = 1.2 см + 7 · 0.1 мм = 1.2 см + 0.7 мм = 1.27 см = $1.27 \cdot 10^{-3}$ м

Рис. 3. Определение значений по нониусу

При точных измерениях расстояний нередко применяют **микрометрические винты** – винты с малым и очень точно выдержанным шагом.

Такие винты употребляются, например, в **микрометрах** (**рис.5**).

Один поворот винта микрометра передвигает его стержень на *0,5 мм*. Барабан, связанный со стержнем, разбит на *50 делений*. Поворот на одно деление соответствует смещению стержня на *0,01 мм*.

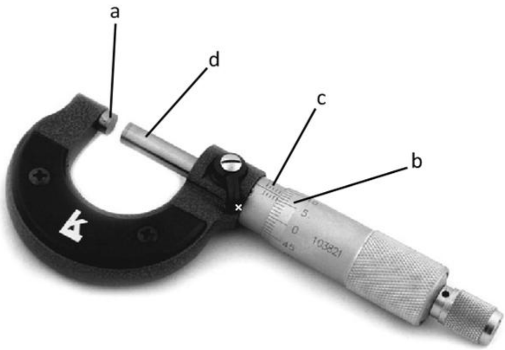


Рис. 5. Микрометр

С этой точностью обычно и производятся измерения с помощью **микрометра** (**рис.5**).

Конструкция микрометра: внутри правой части рамки микрометра проходит микрометрический винт, который оканчивается выступом d. На левой части рамки имеется неподвижный выступ a.

На внешней цилиндрической поверхности "хвоста" ролика, через который проходит винт, нанесены две шкалы сверху и снизу с делениями через *1 мм*, но смещенными относительно друг друга на *0,5 мм*.

На винт насажена муфта b, на скошенном краю которой по всей окружности нанесена круговая шкала, разделенная на *50 делений*.

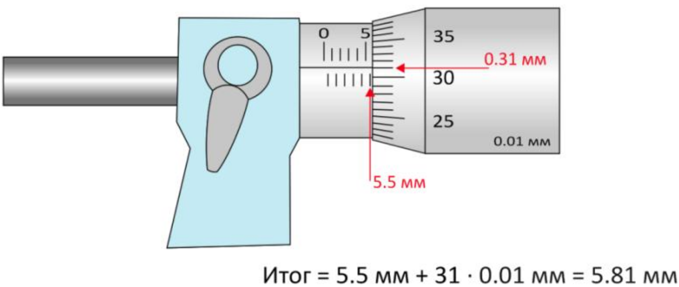


Рис. 6. Определение значений микрометра

При вращении муфты выступ перемещается и смещается на *0,5 мм* при одном обороте. Когда выступы a и d сдвинуты вплотную, край муфты проходит через нуль линейной шкалы, а нуль шкалы муфты совпадает с горизонтальной чертой. Отношение шага винта *0,5 мм* к числу делений круговой шкалы *50* и есть точность микрометра $\frac{0{,}5}{50} = 0{,}01\,мм$ (**рис. 6**)

Взвешивание тела

В случаях, когда не требуется высокой точности определения массы, пользуются **техническими весами**. Весы технические 2 класса не имеют шкалы.

Отсчет получают путем суммирования номинальных значений гирь, находящихся в чашке. Если при измерении массы достигнуто "точное" равновесие весов, то за результат отсчета принимают массу гирь в чашке. Если равновесие весов не достигнуто, то это признак того, что отсутствуют гири мелкого номинала.

Например, при измерении массы на весах оказалось, что масса тела больше *65 г 270 мг*, но меньше *65 г 300 мг*. В этом случае измерение произведено с точностью до *30 мг*. Абсолютная погрешность равна *15 мг*.

Для определения погрешности при точном взвешивании на аналитических весах следует предварительно уравновесить весы гирями, добавляют к гирям еще *20–30 мг*. При этом стрелка отклонится на несколько делений шкалы. Разделив добавочную нагрузку на число делений, находим чувствительность весов.

Погрешность взвешивания принимается равной половине чувствительности весов.

ХОД РАБОТЫ

1. Измерить высоту цилиндра штангенциркулем. Проверить полученный результат повторными измерениями высоты при повороте цилиндра вокруг оси. Оценить погрешность измерения высоты Δh по формуле (4).

2. Измерить диаметр цилиндра микрометром, также проверяя полученный результат. Оценить погрешность измерения диаметра ΔD.

3. Взвесить цилиндр на технических весах. Оценить погрешность взвешивания Δm.

4. Вычислить плотность цилиндра ρ по формуле (1).

5. Вычислить относительную и абсолютную погрешности по формулам (11) и (12).

6. Результаты измерений и значения погрешностей измерений занести в **Таблицу**.

Таблица

№	h, м	Δh, м	D, м	ΔD, м	m, кг	Δm, кг	ρ, кг/м^3	$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho}$, %	$\Delta\rho$, кг/м^3
1									
2									
3									
Сред.									

Все найденные величины должны быть выражены в **единицах системы СИ**.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называют измерением физической величины?
2. Виды измерений.
3. Что такое погрешность?
4. Виды погрешностей.
5. Причины возникновения погрешностей.
6. Правила пользования штангенциркулем и микрометром.
7. Что называется плотностью вещества?
8. В каких единицах она измеряется?