

Лабораторная работа №11

Исследование прямолинейного равноускоренного движения тел на машине Атвуда

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общие положения

Основными кинематическими характеристиками и величинами равноускоренного движения являются: радиус-вектор материальной точки \vec{r} , ее мгновенные скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} , траектория движения и пройденный путь h .

Мгновенная скорость точки определяется как $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Мгновенное ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Интегрирование последнего выражения при условии постоянства ускорения дает закон изменения скорости равнопеременного движения:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

где \vec{v}_0 - начальная скорость,

\vec{v} - скорость в момент времени t .

При движении из состояния покоя, при $\vec{v}_0 = 0$:

$$\vec{v} = \vec{a}t$$

В свою очередь, интегрирование выражения для \vec{v} дает закон изменения \vec{r} при равноускоренном движении:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

При движении из начала координат без начальной скорости это выражение упрощается:

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}t^2}{2}$$

Если точка движется по прямой в одном направлении, вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ по модулю равен пройденному пути h . При равноускоренном движении без начальной скорости, которое изучается в этой работе

$$h = \frac{at^2}{2}$$

1.2. Машина Атвуда

Теперь рассмотрим динамику равноускоренного движения системы тел, состоящей из двух грузов, подвешенных к концам *нерастяжимой невесомой* нити, перекинутой через блок. Блок вращается вместе с осью, к которой прикреплен механизм для остановки

блока. Обозначим эффективный момент инерции системы, вращающейся относительно оси, как J . Рассчитаем ускорение движения грузов

На каждый груз будут действовать две силы (рис. 1): сила тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{F}_{n1} , \vec{F}_{n2} , соответственно, под действием которых грузы будут перемещаться, вращая блок. Направление ускорений \vec{a}_1 и \vec{a}_2 показаны на рис. 1, для случая, когда $m_1 > m_2$. На вращающийся блок действуют моменты сил со стороны нитей \vec{F}'_{n1} и \vec{F}'_{n2} , а также момент \vec{M} «эффективной» силы сопротивления \vec{F}_c , возникающей в подшипниках механизма машины Атвуда.

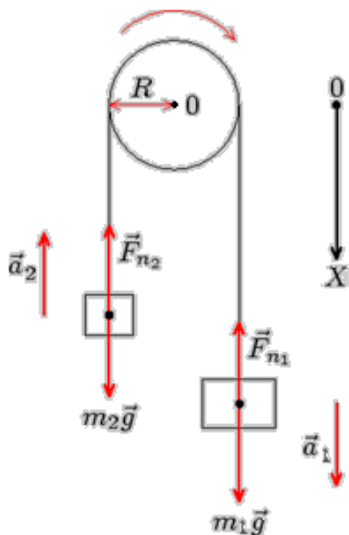


Рис. 1

Поскольку нить нерастяжима, то ускорения правого и левого грузов равны по величине и противоположны по знаку:

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2, \text{ т.е. } a_1 = a_2 = a$$

Исходя из условия невесомости нити, согласно третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{n1} = -\vec{F}'_{n1}, \quad \vec{F}_{n2} = -\vec{F}'_{n2}, \quad \text{т.е.} \quad F_{n1} = F'_{n1}, \quad F_{n2} = F'_{n2}$$

Запишем законы поступательного движения каждого груза и вращательного движения блока в векторной форме:

$$m_1 \vec{g} + \vec{F}_{n1} = m_1 \vec{a}_1,$$

$$m_2 \vec{g} + \vec{F}_{n2} = m_2 \vec{a}_2,$$

$$\vec{M}'_{n1} + \vec{M}'_{n2} + \vec{M} = J \vec{\varepsilon},$$

где $M'_{n1} = F'_{n1} R = F_{n1} R$, $M'_{n2} = F'_{n2} R = F_{n2} R$ – моменты сил \vec{F}'_{n1} и \vec{F}'_{n2} соответственно;

J – момент инерции вращающейся системы;

$\varepsilon = \frac{a}{R}$ – угловое ускорение блока;

R – радиус блока.

В проекциях на ось X , положительное направление которой указано на рис. 1:

$$m_1 g - F_{n1} = m_1 a, \tag{1}$$

$$m_2 g - F_{n2} = -m_2 a, \quad (2)$$

В проекции на ось вращения блока:

$$F_{n1} R - F_{n2} R - M = J \frac{a}{R}$$

или

$$F_{n1} - F_{n2} = \frac{M}{R} + \frac{J}{R^2} a \quad (3)$$

Решая систему уравнений (1, 2, и 3), получим выражение для ускорения системы:

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}} \right) \cdot g - \frac{M}{R \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right)},$$

или

$$a = gx - y, \quad (4)$$

где

$$x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}, \quad y = \frac{M}{R \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right)} \quad (5)$$

Таким образом ускорение грузов a связано с аргументом x линейной зависимостью (4), где g – угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс, y – это отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат (рис. 2).

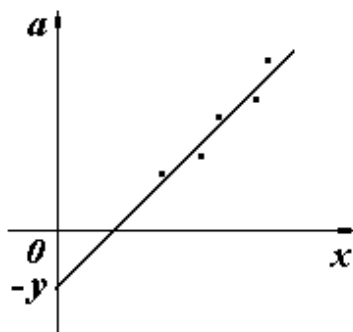


Рис. 2

Задача нахождения параметров g и y может быть решена **методом наименьших квадратов**, суть которого сводится к тому, чтобы достичь минимальной суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от проведенной прямой.

Подробно метод наименьших квадратов рассмотрен в теории обработки данных.

Приведем конечные результаты в предположении, что погрешность измерения величины x много меньше погрешности величины a ($\Delta x \ll \Delta a$), т.к. данный случай часто реализуется на практике.

Для нахождения параметров g и y следует предварительно вычислить следующие суммы:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n a_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad S_4 = \sum_{i=1}^n x_i a_i \quad (6)$$

После этого величины g и y определяют по формулам:

$$g = \frac{n \cdot S_4 - S_1 \cdot S_2}{n \cdot S_3 - S_2^2}, \quad y = \frac{S_1 \cdot S_3 - S_2 \cdot S_4}{n \cdot S_3 - S_2^2}. \quad (7)$$

Среднеквадратичные отклонения величин g и y рассчитываются следующим образом:

$$\sigma_g^2 = \frac{\sigma_a^2 \cdot n}{n \cdot S_3 - S_2^2}, \quad \sigma_y^2 = \frac{\sigma_a^2 \cdot S_2}{n \cdot S_3 - S_2^2}, \quad (8)$$

где

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (a_i - y - gx_i)^2 \quad (9)$$

Погрешности величин g и y рассчитываются следующим образом:

$$\Delta g = t_{n,P} \sigma_g, \quad \Delta y = t_{n,P} \sigma_y, \quad (10)$$

где $t_{n,P}$ – коэффициент Стьюдента для n измерений с доверительной вероятностью P (**Таблица 3**).

2. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДА

2.1. Установка

Установка изображена на рисунке 3.

2.2. Цель работы:

1. Определение ускорения свободного падения.
2. Определение момента «эффективной» силы сопротивления движения грузов.

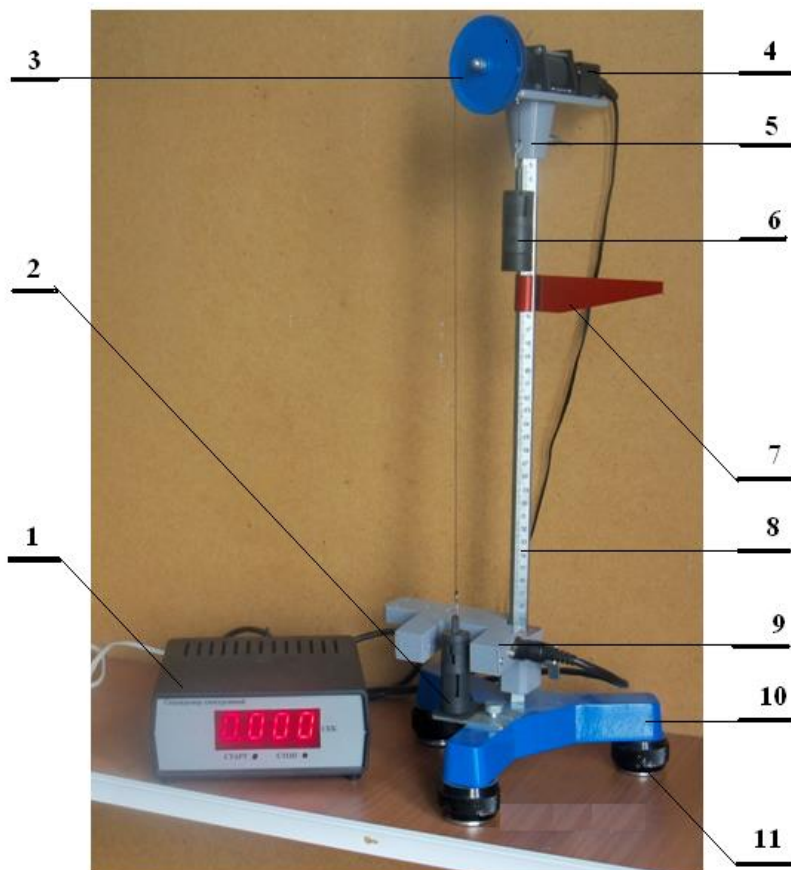


Рис. 3. Лабораторная установка

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1 – электронный блок ФМ 1/1; | 7 – визирь; |
| 2 – груз с набором разновесов; | 8 – вертикальная стойка с миллиметровой шкалой; |
| 3 – малоинерционный блок; | 9 – кронштейн с фотодатчиком; |
| 4 – электромагнитный тормоз; | 10 – основание; |
| 5 – верхний кронштейн; | 11 – регулируемые опоры. |
| 6 – груз с набором разновесов; | |

2.3. Приборы

Приборы	Предел измерения	Цена деления	Точность	Погрешность
Линейная шкала	250 мм	1 мм		0,5 мм
Секундомер	9999 мс		1 мс	1 мс

2.4. Принадлежности

Наборный груз массой (150 ± 1) г;

Основной груз массой $(50,0 \pm 0,5)$ г;

Разновесы массой $(20,0 \pm 0,2)$ г, $(10,0 \pm 0,1)$ г;

Радиус блока $R = (35,0 \pm 0,5)$ мм;

Момент инерции вращающейся системы $J = (24,5 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$ кг·м².

2.5. Основные расчетные формулы

Ускорение грузов:

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad (11)$$

где h – высота падения грузов,

t – время падения грузов.

Массовый аргумент линейной зависимости ускорения:

$$x = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}, \quad (12)$$

где m_1 и m_2 – массы грузов,

J – эффективный момент инерции системы, вращающейся относительно оси;

R – радиус блока.

Момент «эффективной» силы сопротивления:

$$M = y \cdot R \cdot \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right), \quad (13)$$

где y – это отрезок, отсекаемый прямой ($a = g \cdot x - y$) на оси ординат.

2.6. Подготовка к работе

1. Перекинуть через блок нить с двумя равными грузами массами по 90 г и убедиться, что система находится в положении безразличного равновесия.
2. Произвести регулировку положения основания при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения уровень.
3. Установить кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы вертикальной стойки так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в красный цвет, совпала с одной из рисок шкалы, а правый груз при движении вниз проходил в центре рабочего окна

фотодатчика (за нижнее положение груза берется риска шкалы, соответствующая риске на корпусе фотодатчика и являющаяся как бы продолжением оптической оси фотодатчика, которую пересекает движущийся груз).

4. Подключить фотодатчик и электромагнитный тормоз установки к электронному блоку при помощи кабеля.

2.7. Порядок проведения измерений

1. При помощи визира по шкале вертикальной стойки определить h , как расстояние от нижней плоскости правого груза в крайнем верхнем положении до оптической оси фотодатчика. Значение h записать в **таблицу 1**.
2. Установить правый груз в крайнем верхнем положении.
3. Нажать кнопку «СЕТЬ» блока. При этом должно включиться табло индикации и должен сработать фрикцион электромагнитного тормоза.
4. Доложить на правый груз перегрузок в 20 г.
5. Нажать кнопку «ПУСК» блока. Происходит растормаживание электромагнитного тормоза, правый груз начинает опускаться, и таймер блока начинает отсчет времени. При пересечении правым грузом оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится.
6. Записать показания таймера, т.е. время движения грузов.
7. Повторить пп. 2–5 пять раз.

8. Данные занести в **таблицу 1**.

9. Доложить на каждый груз перегрузок в 10 г, каждый раз повторяя пп. 1–7.

Таблица 1

№ п/п	Грузы, г		$h = \underline{\hspace{2cm}}$ м					
			Время движения грузов, t , с					
	m_1	m_2	1	2	3	4	5	t_{cp}
1	110	90						
2	100	80						
3	90	70						
4	80	60						
5	70	50						

2.8. Обработка результатов измерений

1. Оценить погрешности измерений времени движения грузов.
2. Рассчитать ускорение движения грузов a по формуле (11).
3. Определить отношение x по формуле (12).
4. Данные занести в **таблицу 2**.
5. По методу наименьших квадратов построить график $a(x)$.
6. По методу наименьших квадратов по формулам (6), (7) определить ускорение свободного падения g и момент M «эффективной» силы сопротивления движению грузов (13).

7. Определить погрешности найденных величин по формулам (8)–(10), используя данные **Таблицы 3**.

Таблица 2

№ п/п	1	2	3	4	5	Σ
$a, \text{ м/с}^2$						$S_1 =$
x						$S_2 =$
x^2						$S_3 =$
ax						$S_4 =$
$g =$						
$M =$						

Таблица 3

Коэффициенты Стьюдента при вероятности $P = 0,95$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{P,n}$	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23

n	11	12	13	14	15	20	25	30	40
$t_{P,n}$	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,09	2,06	2,04	2,02

Контрольные вопросы

1. Дайте определение материальной точки.
2. Как определяется положение материальной точки?
3. Дайте определение системы отсчета.

4. Что такое декартова система координат?
5. Дайте определение механического движения.
6. Что такое скорость материальной точки?
7. Как математически записывается быстрота изменения какой-либо переменной величины?
8. Дайте определение ускорения материальной точки?
9. Что такое траектория движения материальной точки?
10. Что такое закон движения?
11. Запишите закон движения для движения материальной точки с постоянным ускорением.
12. Запишите закон изменения скорости для движения материальной точки с постоянным ускорением.
13. Дайте определение пути при произвольном движении материальной точки.
14. Напишите формулу для вычисления пути при произвольном движении материальной точки.
15. Дайте определение средней скорости. Напишите формулу для ее вычисления.
16. Дайте определение тангенциального ускорения.
17. Дайте определение нормального ускорения.
18. Напишите формулу для вычисления величины полного ускорения по известным тангенциальному и нормальному ускорениям.

19. Как движется материальной точки, если ускорение остается все время направленным вдоль скорости?
20. Как движется материальной точки, если ускорение все время направлено против скорости?
21. Как движется материальной точки, если ускорение все время остается направленным перпендикулярно скорости?
22. Как движется материальной точки, если скорость все время направлена вдоль радиус-вектора?
23. Как движется материальной точки, если скорость все время направлена против радиус-вектора?
24. Как движется материальной точки, если скорость все время направлена перпендикулярно радиус-вектору?
25. Какое движение называется свободным падением? От чего зависит и чему равно ускорение свободного падения?
26. Оцените массу Земли.
27. В чем преимущество и в чем недостатки предложенного метода исследования движения тел в поле земного тяготения?
28. Какие погрешности называют случайными, а какие систематическими? Чем обусловлены эти погрешности в проделанной лабораторной работе?