

## Лабораторная работа № 2

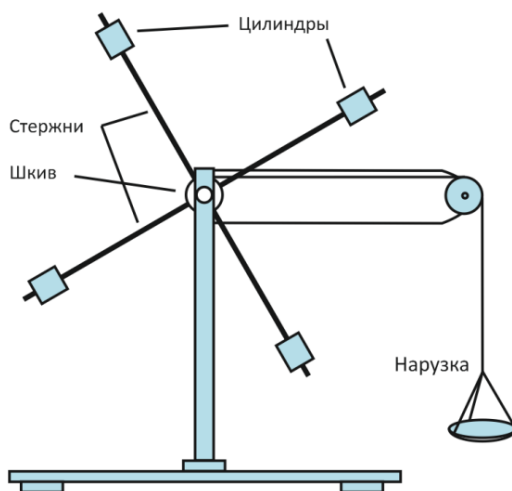
# Определение момента инерции, момента сил и углового ускорения маятника Обербека

### ЦЕЛИ РАБОТЫ

1. Определить момент инерции маховика (крестовины с грузами);
2. Определить зависимость момента инерции от распределения масс относительно оси вращения;
3. Определить момент силы, приводящий маховик во вращение;
4. Определить соответствующие значения угловых ускорений.

### ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Маятник Обербека (**рис. 1**), грузы 100 и 200 г, линейка, штангенциркуль, секундомер.



**Рис. 1.** Маятник Обербека

### Основные данные прибора

- Диаметр шкива  $d = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Масса стержня  $m_{cm} = 9,4 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$
- Длина стержня  $l_{cm} = 46 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Масса цилиндра  $m_{цил} = 14 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$
- Высота цилиндра  $h_{цил} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Внешний радиус цилиндра  $r_1 = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Внутренний радиус цилиндра  $r_2 = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Расстояние от оси вращения до 1 риски  $b_1 = 21,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Расстояние от оси вращения во 2 риски  $b_2 = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
- Расстояние от оси вращения до 3 риски  $b_3 = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

### КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Момент инерции является одной из важнейших динамических характеристик вращающегося тела.

**Момент инерции** – сумма произведений масс всех материальных точек тела на квадраты их расстояний до оси вращения:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

**Момент силы** есть векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы, действующей на тело, на вектор этой силы:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

Сопоставляя уравнение динамики поступательного движения:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \mathbf{M} = J \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

Легко заметить, что во вращательном движении роль силы играет момент силы, роль массы – момент инерции и т.д.

Следовательно, для нахождения момента инерции тела достаточно измерить вращающий момент, действующий на тело и угловое ускорение.

Если намотав нить на шкив (рис. 2), приподнять чашку с грузом  $m$  на высоту  $h$ , а затем опустить, позволив ей свободно падать, то на маховик начнет действовать вращающий момент:

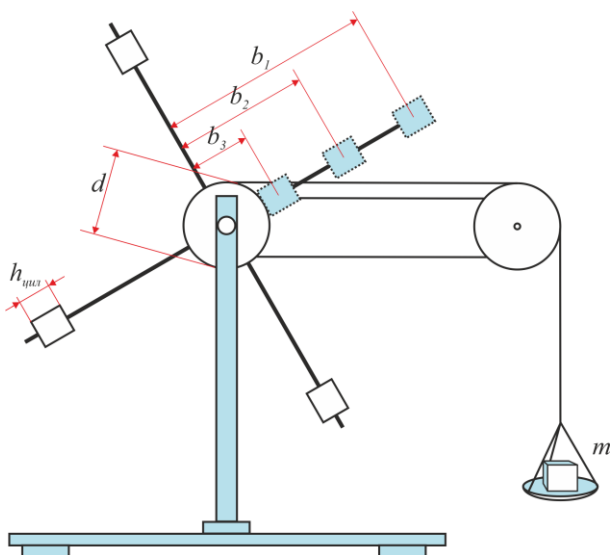


Рис. 2

$$M = F \cdot r = T \frac{d}{2} \quad (1)$$

где  $T$  – сила натяжения нити,  $d$  – диаметр шкива.

Под действием этого постоянного момента маховик начнет вращаться с угловым ускорением  $\varepsilon$ .

Очевидно, что вращение маховика и поступательное движение чашки с грузом происходит за счет потенциальной энергии чашки с грузом.

Пренебрегая потерями энергии на трение, можно считать, что *потенциальная* энергия  $W_n$  полностью переходит в *кинетическую* энергию вращения маховика и движения чашки с грузом:

$$W_n = W_{\kappa 1} + W_{\kappa 2} \quad \text{или} \quad mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

где  $J$  – момент инерции маховика;

$m$  – масса грузов;

$g$  – ускорение свободного падения;

$V$  – скорость поступательного движения чашки с грузом;

$\omega$  – угловая скорость вращения маховика.

Формулу (2) можно преобразовать, пользуясь связью между угловой и линейной скоростями:

$$V = \omega \cdot r = \omega \cdot \frac{d}{2} \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в формулу (2), находим:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{2J \cdot V^2}{d^2}$$

Откуда

$$J = \frac{md^2(2gh - V^2)}{4V^2} \quad (4)$$

Движение чашки с грузом *равноускоренное* и скорость может быть определена как  $V = a \cdot t$ , т.к.  $a = 2h/t^2$ , то получим  $V = 2h/t$ .

Подставив последнее выражение в формулу (4), выведем окончательную расчетную формулу для определения момента инерции маятника Обербека **экспериментальным путем**:

$$J_{\text{эсп}} = \frac{md^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (5)$$

Опыты по определению момента инерции маятника Обербека следует произвести трижды при разных положениях цилиндров на крестовине маятника.

В первом случае следует расположить цилиндры на концах стержня (первая риска), во втором случае на середине стержней (вторая риска) и в третьем - у оси вращения (третья риска).

Полученные разности моментов инерций характеризуются зависимостью момента инерции твердого тела (маятник) от распределения масс отдельных его частей по отношению к оси вращения.

Найденные экспериментальным путем значения моментов инерций можно сравнить со значениями, вычисленными по общеизвестным формулам для нахождения момента инерции маятника.

Так как момент инерции величина аддитивная, то момент инерции рассматриваемой системы (маятника Обербека) равен сумме моментов инерций составных частей крестовины – двух стержней и четырех цилиндров (рис. 2):

$$J = 2 \cdot J_{\text{ст}} + 4 \cdot J_{\text{цил}} \quad (6)$$

$$J_{\text{ст}} = \frac{1}{12} m_{\text{ст}} \cdot l_{\text{ст}}^2 \quad (7)$$

$$J_{\text{цил}} = J_{\text{цил}0} + m_{\text{цил}} b^2 = \frac{m_{\text{цил}}}{4} (r_1 - r_2)^2 + \frac{m_{\text{цил}}}{12} h_{\text{цил}}^2 + m_{\text{цил}} b^2 \quad (8)$$

где  $b$  – расстояние от риски, нанесенной на стержне крестовины до оси вращения,

$h_{\text{цил}}$  – высота цилиндра,

$r_1$  – внешний радиус цилиндра,

$r_2$  – внутренний радиус цилиндра.

Подставляя значение моментов инерции (7) и (8) в формулу (6), получим окончательное выражение для определения **теоретического значения** момента инерции:

$$J_{\text{теор}} = 2 \cdot \frac{1}{12} m_{\text{см}} \cdot l_{\text{см}}^2 + 4 \cdot \left( \frac{m_{\text{цил}}}{4} (r_1 - r_2)^2 + \frac{m_{\text{цил}}}{12} h_{\text{цил}}^2 + m_{\text{цил}} b^2 \right) \quad (9)$$

Момент силы, приводящий маховик в движение также зависит от распределения масс. Для вычисления момента силы, воспользуемся основным уравнением динамики поступательного движения.

Для груза  $P$ , движущегося вертикально, уравнение может быть записано:

$$m \cdot a = P - T$$

где  $P$  – сила тяжести, действующая на груз  $m$  ;

$T$  – сила натяжения нити.

Поскольку  $a = 2h/t^2$  , следует, что

$$T = P - ma = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right)$$

Подставив это выражение в формулу (1), получаем значение момента силы:

$$M = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) \cdot \frac{d}{2} \quad (10)$$

По найденным значениям моментов инерции и моментов сил можно, исходя из основного уравнения вращательного движения  $M = J\varepsilon$ , найти соответствующее значение угловых ускорений:

$$\varepsilon = \frac{M}{J_{\text{эксп}}} \quad (11)$$

## ХОД РАБОТЫ

1. Расположить цилиндры на *первой* риске стержня от оси вращения  $b_1$ .
2. Положить на чашку груз определенной массы.
3. Измерить высоту опускания груза  $h$ .
4. Опустить маховик, предоставив ему вращаться под действием груза.
5. Измерить время опускания груза  $t$ .
6. Пункты *n.4* и *n.5* повторить по три раза для грузов  $100\text{г}$  и  $200\text{г}$ .
7. Измерить среднее время опускания груза  $t_{\text{ср}}$ .
8. Расположив цилиндры на второй  $b_2$  и третьей риске  $b_3$  от оси вращения проделать пункты *n.3*, *n.4*, *n.5* и **повторить три раза**.
9. Все полученные данные занести в **Таблицу**.

Вычисления в данной работе рекомендуется выполнять с использованием программы **Microsoft Office Excel** или другими программами для работы с электронными таблицами

10. По формуле (5) определить **экспериментальные** значения моментов инерции  $J_{\text{эксп}}$  при различных расположениях цилиндров.
11. **Теоретическое** значение момента инерции  $J_{\text{теор}}$  рассчитать по формуле (9) и сравнить с экспериментальными.

12. Определить зависимость момента инерции от распределения массы относительно оси вращения.
13. Определить моменты сил  $M$  для каждого эксперимента, воспользовавшись формулой (10).
14. Вычислить значения угловых ускорений  $\varepsilon$ , исходя из основного уравнения вращательного движения (11).
15. Найти относительную погрешность экспериментальных значений моментов инерции путем логарифмирования и дифференцирования формулы (5). Конечная формула должна иметь вид:

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta d}{d} + \frac{2gt\Delta t + 2\Delta h}{gt^2 - 2h} + \frac{\Delta h}{h}$$

16. Сделать выводы.

**Таблица**

Риска	$m$ , кг	$t$ , с	$t_{cp}$ , с	$h$ , м	$J_{эксп}$ , кг·м <sup>2</sup>	$J_{теор}$ , кг·м <sup>2</sup>	$M$ , Н·м	$\varepsilon$ , рад/с <sup>2</sup>
1	0,1							
	0,2							
2	0,1							
	0,2							
3	0,1							



	0,2							

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент инерции, момент силы?
2. Как экспериментально определяется значение момента инерции маятника Обербека?
3. Каким образом можно определить момент силы, как он находится в данной работе?
4. Как изменяется значение момента инерции от распределения масс по отношению к оси вращения?
5. Как изменяются значения момента инерции и момента силы от нагрузки?
6. Сформулируйте теорему Штейнера.
7. Что такое угловое ускорение и как оно определяется в данной работе?
8. Как зависят  $J$ ,  $M$ ,  $\varepsilon$  от распределения масс на оси?