Лабораторная работа № 3

Определение моментов инерции тел с помощью трифилярного подвеса и проверка теоремы Штейнера

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

1. Определение моментов инерции некоторых тел методом крутильных колебаний с помощью трифиллярного подвеса;
2. Проверка теоремы Штейнера.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Трифиллярный подвес, секундомер, линейка, штангенциркуль, исследуемые тела (два диска-груза).

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Одним из методов измерения моментов инерции твердых тел является метод трифиллярного подвеса, совершающего крутильные колебания.

Поэтому, вначале определим, какие колебания называются крутильными, затем ознакомимся с устройством трифиллярного подвеса.

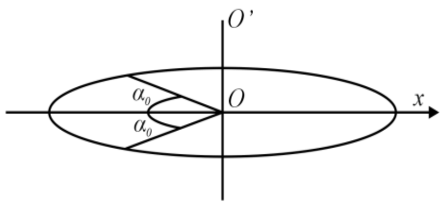

Рис. 1. Крутильные колебания

Гармоническими крутильными колебаниями тела называются периодические движения относительно оси, проходящей через центр масс этого тела, когда угол отклонения от положения равновесия изменяется по закону синуса или косинуса (**рис. 1**):

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad (1)$$

где α_0 – амплитуда колебаний;

T – период колебаний.

Устройство трифиллярного подвеса

Трифиллярный подвес состоит из подвижного диска платформы P (в дальнейшем просто платформа) массой M, радиуса R, подвешенного на трех симметрично расположенных нитях (**рис 2.a**). Наверху эти нити симметрично закреплены по краям диска P' меньшего радиуса r.

При повороте верхнего диска P' на небольшой угол α вокруг вертикальной оси OO' все три нити принимают наклонное положение. Центр тяжести системы несколько приподнимается по оси вращения OO' (**рис. 2.b**).

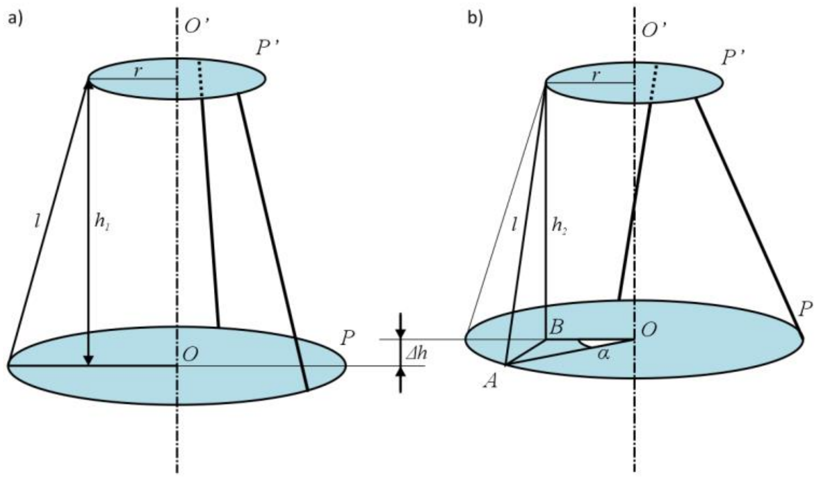

Рис. 2. Трифилярный подвес

Период крутильных колебаний и момент инерции платформы

Пусть при вращении платформа поднимется на высоту $\Delta h = h_1 - h_2$, тогда приращение ее потенциальной энергии равно

$$\Delta E_n = Mg\Delta h$$

где g – ускорение свободного падения.

При вращении платформы в обратную сторону потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию вращательного движения

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

где J – момент инерции платформы;
ω – ее угловая скорость.

В момент прохождения положения равновесия кинетическая энергия *максимальна*. Если пренебречь трением, то на основании закона сохранения энергии можно записать для колеблющейся платформы

$$Mg\Delta h = \frac{1}{2} J\omega_{\max}^2 \qquad (2)$$

Угловую скорость платформы можно найти, взяв производную по времени от α (см. (1))

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T}\alpha_0 \cos\frac{2\pi}{T}t$$

Очевидно, что

$$\omega_{\max} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \qquad (3)$$

Найдем величину Δh при поворотах платформы на угол α_0, считая, что $h_1 + h_2 \approx 2l$ (l – длина нити)

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 - h_2} \approx \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \qquad (4)$$

Из **рис. 2 a, b** видно, что

$$h_1^2 = l^2 - (R - r)^2$$
$$h_2^2 = l^2 - (BC)^2 = l^2 - \left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha_0\right)$$

Подставляя значения h_1^2 и h_2^2 в формулу (4) получим

$$\Delta h = \frac{2Rr(1 - \cos\alpha_0)}{2l} = \frac{4Rr\sin^2\frac{\alpha_0}{2}}{2l}$$

Ввиду малости угла α_0 синус заменим аргументом

$$\Delta h = \frac{2Rr\alpha_0^2}{2l} \qquad (5)$$

Подставляя выражения (3) и (5) в формулу (2), получим окончательно

$$J = \frac{MgRr}{4\pi^2 l} T^2 \qquad (6)$$

Поскольку параметры прибора R, r, l во время опыта не меняются, формулу (6) удобно применять в виде

$$J = kMT^2 \qquad (7)$$

где $k = \dfrac{gRr}{4\pi^2 l}$

Аддитивность моментов инерции

Аддитивность (лат. *additivus* – прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям.

Например, аддитивность объёма означает, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей. Примеры аддитивных величин: энергия, импульс, энтропия, мощность, давление, электрический заряд.

Общий момент инерции нескольких тел равен *сумме* моментов инерции отдельных тел, если центр масс каждого из них лежит на оси вращения.

Если на платформу поместить некоторое тело массой m, так, чтобы равномерное натяжение нитей не нарушалось, то момент инерции J этой системы находят по формуле (6) или (7), где вместо m будет сумма масс $(M+m)$.

А так как момент инерции величина **аддитивная**, т.е. $J = J_{пл} + J_{гр}$, то можно определить момент инерции исследуемого тела:

$$J_{гр} = J - J_{пл}$$

где $J_{пл}$, $J_{гр}$ – момент инерции платформы и груза.

Теорема Штейнера

Момент инерции тела J относительно произвольной оси *AA’* равен сумме момента инерции J_0 тела относительно оси *BB’*, параллельной данной и проходящей через центр масс тела *C*, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между осями (**рис. 3**)

$$J = J_0 + ma^2 \tag{8}$$

В соответствии с теоремой Штейнера момент инерции диска относительно оси *AA’*, равен моменту инерции относительно оси *BB’*, проходящей через центр масс, $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$ плюс ma^2

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + ma^2 \tag{9}$$

Таким образом, с удалением центра масс тела от оси вращения его момент инерции относительно этой оси возрастает. Момент инерции системы тел зависит не только от его массы, но и от распределения масс в системе относительно оси вращения.

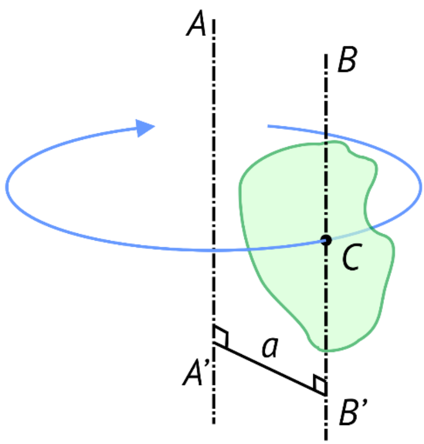

Рис. 3. Теорема Штейнера

ХОД РАБОТЫ

1. Определение момента инерции ненагруженной платформы

1.1. Поворотом на небольшой угол $3°–5°$ верхнего диска сообщить платформе колебательное движение. Измерить время t для N_1 полных колебаний и вычислить период одного колебания:

$$T_1 = \frac{t_1}{N_1}$$

где N – число полных колебаний.

Таблица 1.1

№	N_1	t_1, с	T_1, с
1	10		
2	10		
3	10		
		Среднее значение	

1.2. Определив величины R, r, l, M, определить *теоретическое* значение момента инерции платформы $J_{пл}$ по формуле для сплошного однородного диска (цилиндра), а также *экспериментальное* значение:

Таблица 1.2

Экспериментальное значение момента инерции платформы	Теоретическое значение момента инерции платформы
$J_{пл\,Э} = \frac{MgRr}{4\pi^2 l} T_{1сред}^2$	$J_{пл\,T} = \frac{1}{2} MR^2$

1.3. Сравнить с экспериментальное значение $J_{пл\,Э}$ с теоретическим $J_{пл\,T}$

2. Определение момента инерции исследуемого тела

2.1. Расположить два груза, имеющих форму диска, на платформе так, чтобы центр масс каждого из них лежал на оси вращения системы (в центре платформы).

2.2. Повторить измерения *п.1.1.* и определить период колебаний T_2.

Таблица 2.1

№	N_2	t_2, с	T_2, с
1	10		
2	15		
3	20		
		Среднее значение	

2.3. Определить момент инерции платформы с грузами в центре по формуле (6):

$$J_2 = \frac{(M + m_1 + m_2)gRr}{4\pi^2 l} T^2_{2\,сред},$$

где m_1, m_2 – массы грузов.

2.4. Так как момент инерции величина аддитивная, то $J = J_{пл} + J_{гр1} + J_{гр2}$, определить *экспериментальное* значение момента инерции грузов, а также вычислить *теоретическое* значение момента инерции грузов с радиусом $r_{гр}$

Таблица 2.2

Экспериментальное значение момента инерции грузов	Теоретическое значение момента инерции грузов
$J_{гр\,Э} = J_2 - J_{пл\,Э}$	$J_{гр\,T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)r_{гр}^{\;2}$

2.5. Сравнить с экспериментальное значение $J_{грЭ}$ с теоретическим $J_{грT}$

3. Проверка теоремы Штейнера

3.1. Для проверки теоремы Штейнера разместить два груза симметрично на расстоянии a от оси вращения платформы. Подобное распределение масс в системе, как было указано выше, приведет к увеличению ее момента инерции, хотя общая масса системы при этом остается постоянной.

3.2. Выполнить *п.1.1.* и определить период колебаний T_3 платформы с разнесенными грузами.

Таблица 3.1

№	N_3	t_3, с	T_3, с
1	10		
2	15		
3	20		
		Среднее значение	

3.3. Определить момент инерции этой системы по формуле:

$$J_3 = \frac{(M + m_1 + m_2)gRr}{4\pi^2 l} T^2_{3\,сред}$$

3.4. Вычислить *экспериментальный* и *теоретический* момент инерции грузов

Таблица 3.2

Экспериментальное значение момента инерции грузов	Теоретическое значение момента инерции грузов
$J'_{гр\,Э} = J_3 - J_{пл\,Э}$	$J'_{гр\,T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)r^2_{гр} + (m_1 + m_2)a^2$

3.5. Сравнить $J'_{грT}$ с *экспериментальным* значением $J'_{грЭ}$

4. Вычислить погрешности и сделать выводы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая физическая величина называется моментом инерции?
2. Момент инерции величина аддитивная. Объясните смысл этого выражения.
3. Какие колебания называются крутильными?
4. Каково назначение трифиллярного подвеса? Под действием какой силы трифиллярный подвес совершает крутильные колебания?
5. Сформулируйте и объясните теорему Штейнера.
6. Выведите формулу погрешности для определения экспериментального значения момента инерции.