Лабораторная работа № 6

Изучение законов движения универсального маятника

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Определение ускорения свободного падения, приведенной длины, положения центра тяжести и моментов инерции универсального маятника.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Универсальный оборотный маятник, секундомер, линейка.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Физическим маятником называется тело, укрепленное на неподвижной горизонтальной оси, не проходящее через его центр тяжести, и способное совершить колебания относительно этой оси.

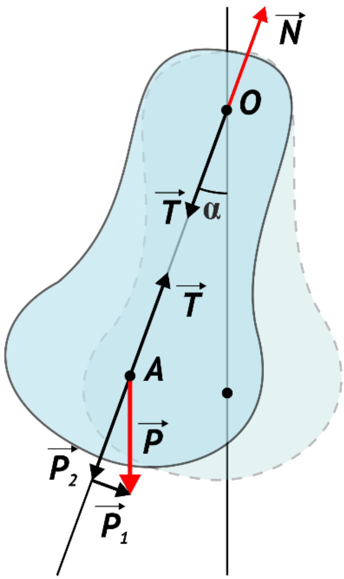

Рис. 1. Физический маятник

Физический маятник (**рис. 1**), отклоненный на малый угол α от положения равновесия, будет совершать *гармонические колебания*.

Обозначим через J момент инерции маятника относительно оси O. Пусть точка A является центром тяжести маятника, силу тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ можно разложить на две составляющие, одна из которых ($\mathbf{P}_2$) уравновешивается реакцией опоры $\mathbf{N}$. Под действием другой составляющей $P_1 = P\sin\alpha$ маятник приходит в движение.

На основании основного закона механики для вращательного движения $\mathbf{M} = J\boldsymbol{\varepsilon}$ имеем:

$$J\varepsilon = -P_1 \cdot l_1 \qquad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \qquad (2)$$

где l_1 – расстояние *(OA)* от точки подвеса до центра тяжести.

Так как угол α мал, то

$$\sin\alpha \cong \alpha, \qquad (3)$$

и $P_1 = mg\alpha$, подставляя (2) и (3) в (1) получим:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = 0 \qquad (4)$$

Частным решением дифференциального уравнения (4) является

$$\alpha = A\cos\omega t \qquad (5)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \qquad (6)$$

Найдем ε, подставив (5) в (2):

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t = -A\frac{mgl}{J}\cos\omega t = -\frac{mgl}{J}\alpha \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (4) убедимся, что левая часть уравнения тождественно равна *нулю*:

$$J\frac{mgl\alpha}{J} - mgl\alpha = 0$$

Сравнивая (6) со значением $\omega = \frac{2\pi}{T}$, получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \qquad (8)$$

Из (8) следует, что период колебания увеличивается с увеличением момента инерции.

Отношение $\frac{J}{ml}$, имеющее размерность длины, называется **приведенной длиной** $l_{пр}$ физического маятника. Подставляя величину $l_{пр}$ в формулу (8), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}} \qquad (9)$$

Следовательно, период колебания определяется приведенной длиной маятника и ускорением свободного падения.

Универсальный (оборотный) маятник (**рис. 2**) состоит из круглого стального стержня, на котором с помощью винтов закреплены две массивные чечевицы и две опорные призмы.

Перемещение вдоль стержня массивных чечевиц приводит к изменению положения центра тяжести маятника (точка *A*), а при *перемещении призм* *положение центра тяжести практически меняться не будет*, так как их масса много меньше массы чечевиц и стержня, что позволит независимо друг от друга менять расстояние l_1 и l_2 между центром тяжести и осями вращения маятника.

Пусть при установке маятника на одну из опорных призм период колебания:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}},$$

А при установке на другую призму:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}$$

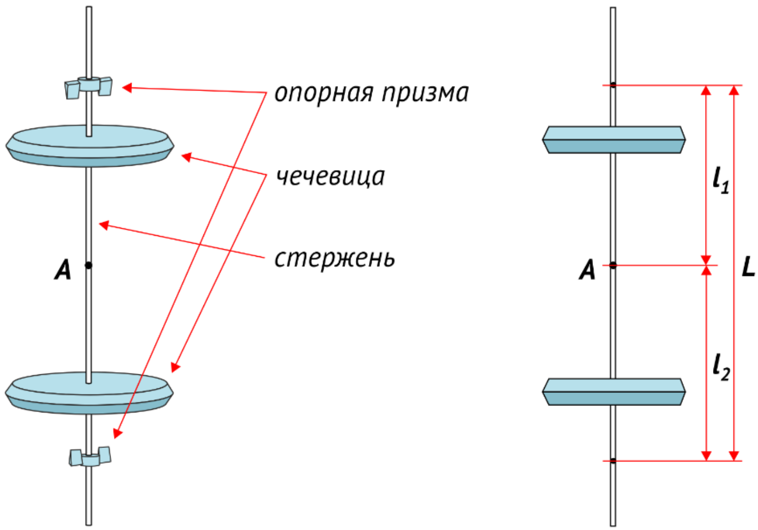

Рис. 2. Универсальный маятник

Теорема Штейнера позволяет вычислить момент инерции J тела относительно произвольной оси, если известен момент инерции J_0 относительно параллельной оси проходящей через центр тяжести тела и известно расстояние между осями a.

$$J_1 = J_0 + ma^2$$

Применяя эту формулу к движению маятника, получим:

$$J_1 = J_0 + ml_1^2 \qquad (10)$$

$$J_2 = J_0 + ml_2^2 \qquad (11)$$

Перемещением одной из опорных призм можно подобрать такое положение оси вращения, что $T_1 = T_2 = T$, хотя $J_1 \neq J_2$ и $l_1 \neq l_2$.

В этом случае из соотношений (10) и (11) следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot mgl_1 &= J_0 + ml_1^2 \\ \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 \cdot mgl_2 &= J_0 + ml_2^2 \end{aligned} \qquad (12)$$

Разность между левыми и правыми частями уравнений (12) позволяет получить формулу для **экспериментального** определения ускорения g.

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} L \qquad (13)$$

где $L = l_1 + l_2$ – будет расстоянием между опорными призмами оборотного маятника.

Сравнение выражений (9) и (13) показывает, что $L = l_{np}$ и, следовательно:

$$J_1 = ml_1 L \qquad J_2 = ml_2 L, \qquad (14)$$

а момент инерции:

$$J_0 = J_1 - ml_1^2 = ml_1L - ml_1^2 = ml_1(L - l_1) = ml_1l_2 \qquad (15)$$

ХОД РАБОТЫ

1. Установить маятник на ту опорную призму, положение которой в ходе опыта **меняться не будет**.

2. Отклонить маятник на угол *5°* и измерить по секундомеру время *20–30* полных колебаний.

3. Вычислить период колебаний

   $$T = \frac{t}{N},$$

   где t – время,
   N – количество колебаний маятника.

4. Перевернуть маятник, установить его на другую опорную призму.

5. Аналогично T_1 определить период T_2.

   Если T_2 не попадает в интервал времени $T_1 \pm 0{,}02T_1$, следует изменить положение опорной призмы, вновь измерить период колебаний и повторять эту операцию до тех пор, пока T_2 не окажется в заданном интервале значений.

6. Полученные данные занести в **Таблицу.**

7. Для определения положения центра тяжести необходимо снять маятник уравновесить его на остром ребре специальной подставки, затем измерить расстояния L, l_1 и l_2.

8. По формулам (13), (14), (15) вычислить значение ускорения g и моментов инерции J_1, J_2, J_0. Масса маятника m указана на одной из чечевиц.

9. Определить погрешность измерения g :

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta L}{L} + 2\frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

10. Сравнить значения ускорения g с табличным. Сделать вывод.

Таблица

№	T_1, с	T_2, с	L, м	l_1, м	l_2, м	J_0, кг·м²	J_1, кг·м²	J_2, кг·м²	g, м/с²	$\frac{\Delta g}{g}$, м/с²
1										
2										
3										
Среднее значение										

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую величину называют моментом инерции тела?
2. Сформулируйте теорему Штейнера.
3. Зависит ли период колебания физического маятника от его массы?
4. Почему масса оборотного маятника довольно велика?
5. Как будет вести себя маятник, если совместить точку его подвеса с центром его тяжести?
6. При каком расстоянии от центра масс до точки подвеса период колебания маятника минимален?
7. Какую величину называют приведенной длиной физического маятника?
8. Почему оборотный маятник снабжен двумя чечевицами?