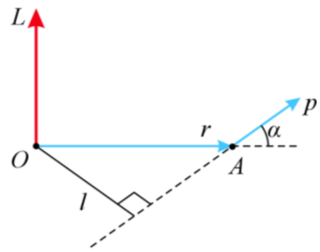
Тема 1.4. Динамика вращательного движения

План

1. Момент импульса частицы
2. Момент силы
3. Уравнение моментов
4. Собственный момент импульса
5. Динамика твердого тела
6. Момент инерции
7. Кинетическая энергия вращающегося тела
8. Связь динамики поступательного и вращательного движения

1. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА



◄ **Момент импульса**

Рассмотрим движение частицы. Пусть **r** – радиус-вектор, характеризующий ее положение относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета, а **p** – ее импульс в этой системе.

Моментом импульса частицы A относительно точки O называют вектор **L**, равный векторному произведению векторов **r** и **p**:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{P}] \qquad (1)$$

Из этого определения следует, что **L** является **аксиальным вектором**.

Его направление выбрано так, что вектора **L**, **r** и **p** образуют правовинтовую систему. Иначе говоря, эти вектора подчиняются **правилу правого винта**.

Модуль вектора **L** равен

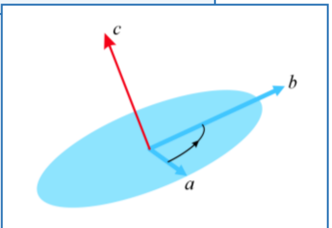
$$L = rp\sin\alpha = lp\,, \qquad (2)$$

где α – угол между векторами **r** и **p**;
l – плечо вектора **p** относительно точки O.

Мат. справка

Правило правого винта

Для векторов **a**, **b** и **c**, связанных соотношением $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если смотреть из конца третьего вектора **c**, то *наикратчайший* поворот от первого вектора **a** ко второму **b** будет происходить **против часовой стрелки**.



2. МОМЕНТ СИЛЫ

Выведем уравнение, описывающее изменение во времени вектора **L**. Его называют *уравнением моментов*.

Для вывода необходимо выяснить – какая механическая величина определяет изменение вектора в данной системе отсчета.

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]$$

Так как точка O неподвижна, то вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ равен скорости частицы, т. е. совпадает по направлению с вектором **p**, поэтому

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p}\right] = 0$$

Используя второй закон Ньютона, получим $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, где **F** – равнодействующая всех сил, приложенных к частице.

Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют моментом силы **F** *относительно* точки O.

Момент силы M – *векторная* физическая величина, равная произведению радиус-вектора **r** точки приложения силы на вектор **F** этой силы.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$$

Единица измерения момента импульса

$$L = \left[\frac{кг \cdot м^2}{с}\right],$$

момента силы

$$M = [Н \cdot м]$$

◄ **Момент силы**

Вектор **M** как и **L**, является *аксиальным*. Модуль этого вектора, аналогично (2), равен

$$M = lF, \tag{4}$$

где l – плечо вектора **F** относительно точки O.

3. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ

Итак,

Производная по времени от момента импульса **L** частицы относительно некоторой точки О выбранной системы отсчета равна моменту равнодействующей силы относительно той же точки О:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \tag{5}$$

◄ **Уравнение моментов тела**

Это уравнение называют уравнением моментов или основным уравнением динамики вращательного движения.

Заметим, что если система отсчета является неинерциальной, то момент силы включает в себя как момент *сил взаимодействия*, так и момент *сил инерции* относительно той же точки O.

Из уравнения моментов (5), в частности, следует, что если M = 0, то L = *const*. Другими словами, если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю в течение интересующего нас промежутка времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.

Данное утверждение справедливо также и для системы материальных точек (тела)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

◄ **Уравнение моментов системы тел**

где $\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$ – суммарный момент импульса системы материальных точек (тела);

$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$ – суммарный момент сил действующих на систему материальных точек (тело).

Подходы к решению проблем

Уравнение моментов (5) позволяет решить **две задачи:**

1) *найти момент силы* **M** относительно интересующей нас точки *O* в *любой* момент времени *t*, если известна зависимость от времени момента импульса **L**(t) частицы относительно той же точки;

2) *определить приращение момента импульса* частицы относительно точки *O* за любой промежуток времени, если известна зависимость от времени момента силы **M**(t), действующего на эту частицу относительно той же точки *O*.

Решение первого вопроса сводится к *нахождению производной* по времени от момента импульса, т. е. $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$, которая и равна, согласно (5), искомому моменту силы **M**.

Решение же второго вопроса сводится к *интегрированию уравнения* (5). Умножив обе части этого уравнения на dt, получим

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$$

Это выражение определяет элементарное приращение вектора **L** за бесконечно малый промежуток времени dt. Проинтегрировав это выражение по времени, найдем приращение вектора **L** за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt \qquad (6)$$

Величину, стоящую в правой части этого уравнения, называют **импульсом момента силы**. В итоге получено следующее утверждение:

Приращение момента импульса частицы за любой промежуток времени равно импульсу момента силы за это же время

В случае, когда не зависит от времени выражение (6) принимает следующий вид

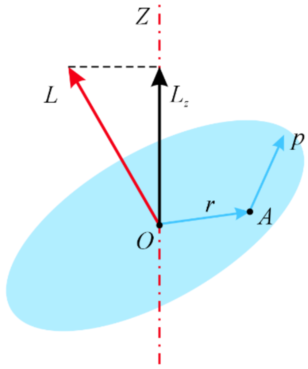
$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{M}\Delta t$$

Моментом импульса L_z **относительно оси** Z называют проекцию на эту ось вектора, определенного относительно произвольной точки O данной оси.

Аналогично вводят и понятие момента силы относительно оси. Их обозначают соответственно L_z и M_z. Значения этих проекций и не зависят от выбора точки O на оси Z.

Выясним свойства этих величин. Спроектировав (5) на ось Z, получим

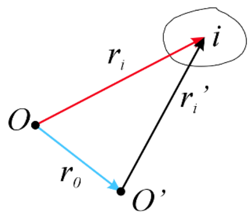
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (7)$$



т. е. производная по времени от момента импульса частицы относительно оси Z равна моменту силы относительно этой оси. В частности, если $M_z = 0$, то $L_z = const$.

Другими словами, если момент силы относительно некоторой неподвижной оси Z равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остается постоянным. При этом сам вектор **L** может и меняться.

4. СОБСТВЕННЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА



Итак, согласно (6), момент импульса **L** системы изменяется только под действием суммарного момента **M** всех внешних сил; именно этот вектор **M** определяет поведение вектора **L**. Теперь рассмотрим некоторые наиболее существенные свойства этих величин и те важные выводы, которые из них вытекают.

Вычислим суммарный момент внешних сил. Как и момент каждой силы, суммарный момент сил зависит, вообще говоря, от выбора точки, относительно которой его определяют.

Пусть **M** – суммарный момент сил относительно точки O, а **M**'– относительно точки O', радиус-вектор которой $\mathbf{r_0}$.

Найдем связь между **M** и **M'**. Радиус-векторы $\mathbf{r_i}$ и $\mathbf{r_i}$' точки приложения силы **F** связаны соотношением.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_0$$

Поэтому выражение для **M** можно записать в таком виде:

$$\mathbf{M} = \sum[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] = \sum[\mathbf{r}_i', \mathbf{F}_i] + \sum[\mathbf{r}_0, \mathbf{F}_i]$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{r}_0, \mathbf{F}], \quad (8)$$

где $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ – результирующая всех внешних сил.

Из формулы (8) видно, что если $\mathbf{F} = 0$, то суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Таков, в частности, случай, когда к системе приложена **пара сил**.

Интересной и важной особенностью в этом отношении обладает **С-система** – это система отсчета, жестко связанная с центром масс системы частиц и перемещающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам.

Так как в общем случае C-система является неинерциальной, то результирующая всех внешних сил должна включать в себя кроме внешних сил взаимодействия $\mathbf{F}_{вз}$ и силы инерции $\mathbf{F}_{инер}$. С другой стороны, в *С-системе* система частиц как целое покоится, а это значит, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{вз} + \mathbf{F}_{инер} = 0$$

Имея в виду (8), получаем следующий важный вывод:

В *С*-системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки *O*.

И другой важный вывод:

В *С*-системе суммарный момент сил инерции относительно центра инерции всегда равен нулю.

В самом деле, сила инерции, действующая на каждую частицу системы, $\mathbf{F}_i = -m_i \mathbf{a}_0$,где $\mathbf{a}_0$ – ускорение *С-системы*. Поэтому суммарный момент всех этих сил относительно центра инерции *C*

$$\mathbf{M}_C^{инер} = \sum [\mathbf{r}_i, -m_i \mathbf{a}_0] = -\left[\left(\sum m_i \mathbf{r}_i, \mathbf{a}_0\right)\right]$$

Исходя из определения радиус-вектора центра масс $\sum m_i \mathbf{r}_i = m\mathbf{r}_C$, а так как в нашем случае $\mathbf{r}_C = 0$ то и $\mathbf{M}_C^{инер} = 0$.

Введем понятие **собственного момента импульса** системы частиц. Как и момент сил, момент импульса системы зависит, вообще говоря, от выбора точки *O*, относительно которой его определяют. При переносе этой точки на расстояние $\mathbf{r}_0$ новые радиус-векторы частиц определяются через старые формулой $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$. Поэтому момент импульса системы относительно точки *O* можно представить так:

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = \sum [\mathbf{r}_i', \mathbf{p}_i] + \sum [\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_i]$$

или

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \sum [\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_i] \ , \qquad (9)$$

где $\mathbf{L}'$ – момент импульса системы относительно точки *O′*;
$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ – полный импульс системы.

Из формулы (9) следует, что если полный импульс системы $\mathbf{p} = 0$, то ее момент импульса не зависит от выбора точки *O*. А этим как раз и отличается *С*-система, в которой система частиц как целое покоится.

Отсюда можно сделать третий важный вывод:

В *С*-системе момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют

Этот момент будем называть **собственным моментом импульса системы** и обозначать $\mathbf{L}_C$.

Установим связь между $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_C$. Пусть $\mathbf{L}$ – момент импульса системы частиц относительно точки *O* *K*-системы отсчета. Так как собственный момент импульса в *C*-системе не зависит от выбора точки *O'*, возьмем точку совпадающей в данный момент с точкой *O* *K*-системы. Тогда радиус-векторы каждой частицы в обеих системах отсчета будут одинаковы в этот момент ($\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i$), скорости же частиц связаны формулой

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{V}_C, \tag{10}$$

где $\mathbf{V}_C$ – скорость *C*-системы относительно *K*-системы.

Поэтому можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i'] + \sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{V}_C] \tag{11}$$

Первая сумма в правой части этого равенства – собственный момент импульса $\mathbf{L}_C$. Вторую сумму представим как

$$\sum m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{V}_C] = m \cdot [\mathbf{r}_C, \mathbf{V}_C] = [\mathbf{r}_C, \mathbf{p}_C],$$

где $m = \sum m_i$ – масса всей системы;

$\mathbf{r}_C$ – радиус-вектор её центра масс в *K*-системе;

$\mathbf{p}_C$ – суммарный импульс системы.

В результате получим

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_C + [\mathbf{r}_C, \mathbf{p}_C] \tag{12}$$

Момент импульса $\mathbf{L}$ системы частиц складывается из ее собственного момента импульса $\mathbf{L}_C$ и момента $[\mathbf{r}_C, \mathbf{p}_C]$, обусловленного движением системы частиц как целого

Возьмем, например, однородный шар, скатывающийся по наклонной плоскости. Его момент импульса относительно некоторой точки этой плоскости складывается из момента импульса, связанного с движением центра масс шара, и собственного момента импульса, обусловленного вращением шара вокруг собственной оси.

Из формулы (12) в частности, следует, что если центр инерции системы покоится (импульс системы $\mathbf{p} = 0$), то ее момент импульса $\mathbf{L}$ – это собственный момент импульса. Такой случай уже рассматривался выше.

В другом крайнем случае, когда $\mathbf{L}_C = 0$, момент импульса системы относительно некоторой точки определяется только моментом, связанным с движением системы как целого, т. е. вторым слагаемым (12).

Так, например, ведет себя момент импульса любого твердого тела, совершающего *поступательное движение*.

Рассмотрим уравнение моментов в *C*-системе. Ранее было отмечено, что уравнение (5) справедливо в любой системе отсчета. Значит, оно справедливо и в *C*-системе. Поэтому сразу можно записать:

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C,$$

где $\mathbf{M}_C$ – суммарный момент внешних сил в *C*-системе.

Так как *C*-система в общем случае неинерциальная, то в $\mathbf{M}_C$ входит помимо моментов внешних сил взаимодействия и момент сил инерции. С другой стороны, в начале этого параграфа было показано, что момент сил $\mathbf{M}_C$ в *C*-системе не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Обычно в качестве такой точки берут точку *C* – центр масс системы.

Целесообразность выбора именно этой точки в том, что относительно ее суммарный момент сил инерции равен нулю, поэтому следует учитывать *только* суммарный момент внешних сил взаимодействия $\mathbf{M}_{вз}$. Итак,

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_{вз} \qquad (13)$$

т. е. производная по времени от собственного момента импульса системы равна суммарному моменту всех внешних сил взаимодействия относительно центра инерции данной системы.

В частности, если $\mathbf{M}_{вз} = 0$, то $\mathbf{L}_C = const$ т. е. *собственный момент импульса* системы сохраняется.

В проекциях на ось *Z*, проходящую через центр инерции системы, уравнение (13) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}_{Cz}}{dt} = \mathbf{M}_{вз\,z}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{M}_{вз\,z}$ – суммарный момент внешних сил взаимодействия относительно неподвижной в С-*системе* оси *z*, проходящей через центр масс.

И здесь если $\mathbf{M}_{вз\,z} = 0$, то $\mathbf{L}_{C\,z} = const$.

5. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела в общем случае определяется *двумя векторными уравнениями*. Одно из них – уравнение движения центра масс, другое – уравнение моментов в *C*-системе (13):

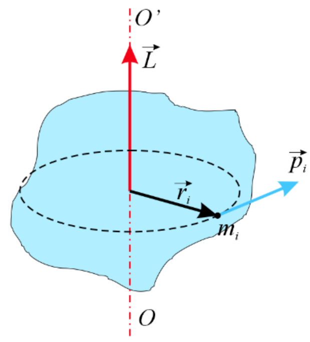
$$m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{F} \qquad \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_{вз} \qquad (15)$$

◄ **Уравнения движения динамики твердого тела**

Зная законы действующих внешних сил, точки их приложения и начальные условия, можно с помощью этих уравнений найти как скорость, так и положение каждой точки твердого тела в любой момент времени, т. е. полностью решить задачу о движении тела.

Приведем некоторые следствия, прямо вытекающие из вида самих уравнений (15). Если перенести силы вдоль направления их действия, то ясно, что не изменятся ни их результирующая $\mathbf{F}$, ни их суммарный момент $\mathbf{M}_{вз}$. При этом уравнения (15) тоже не изменятся, а, следовательно, не изменится и движение твердого тела.

Поэтому точки приложения внешних сил можно переносить вдоль направления действия сил – удобный прием решения задач.



6. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Представим тело в виде системы материальных точек и найдем выражение для момента импульса твердого тела относительно оси $00'$.

Сначала воспользовавшись формулой $v = \omega \cdot r$, запишем моменты импульса материальных точек.

$$L_i = r_i \cdot p_i = r_i \cdot m_i \cdot v_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega_z$$

или $\quad \mathbf{L} = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega}$

Суммируя моменты импульса всех точек системы, получим момент импульса всего тела

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum m_i \cdot r_i^2\right) \cdot \omega_z ,$$

где $\quad m_i$ и r_i^2 – масса и расстояние от оси вращения ***i*-й** частицы твердого тела;

ω_z – его угловая скорость.

Обозначив величину, стоящую в круглых скобках, через I, получим

$$L_z = I\omega_z , \qquad (16)$$

где $\quad I$ – так называемый **момент инерции** твердого тела относительно оси $00'$:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad (17)$$

◄ **Момент инерции**

Момент инерции – величина, равная сумме произведений элементарных масс тела на квадрат их расстояний от оси вращения.

Как видно из определения, при нахождении момента инерции необходимо четко определить момент инерции, относительно какой оси имеется в виду.

Кроме того из (17) следует, что момент инерции твердого тела зависит от распределения масс относительно интересующей нас оси и является величиной **аддитивной**.

Иначе говоря, момент инерции тела равен сумме моментов инерции его отдельных частей.

$$I = I_1 + I_2 + \ldots$$

Вычисление момента инерции тела проводится по формуле

Аддитивность (лат. *additivus* — прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, в некотором классе возможных разбиений объекта на части.

Например, аддитивность объёма означает, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей.

Примеры аддитивных величин:

- Энергия;
- Импульс;
- Энтропия;
- Мощность;
- Электрический заряд;

Единица измерения момента инерции

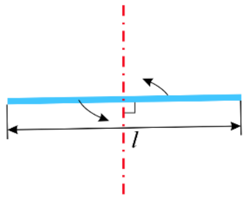
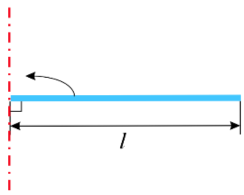
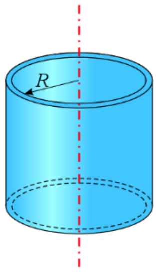
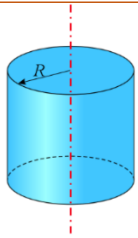
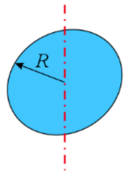
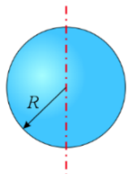
$$I = [кг \cdot м^2]$$

$$I = \int r^2 dm = \int \rho(\vec{r}) dV \,,$$

◀ Момент инерции

где dm, dV – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии от интересующей нас оси Z;
$\rho(\mathbf{r})$ – плотность тела в данной точке.

Моменты инерции некоторых **однородных твердых тел** относительно оси, проходящей через центр масс тела, приведены в следующей таблице (здесь m – масса тела):

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел			
Вид твердого тела	**Положение оси**	**Рисунок**	**Момент инерции** I_C
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярно стержню и проходит через его середину		$\dfrac{ml^2}{12}$
	Перпендикулярно стержню и проходит через его конец		$\dfrac{ml^2}{3}$
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Совпадает с осью цилиндра		mR^2
Сплошной цилиндр радиуса R	Совпадает с осью цилиндра		$\dfrac{mR^2}{2}$
Тонкий диск радиуса R	Совпадает с диаметром диска		$\dfrac{mR^2}{4}$
Шар радиуса R	Проходит через центр шара		$\dfrac{2mR^2}{5}$

Вычисление момента инерции твердого тела произвольной формы относительно той или иной оси представляет собой, вообще говоря, довольно сложную в математическом отношении задачу.

Однако, в некоторых случаях нахождение момента инерции значительно упрощается, если воспользоваться **теоремой Штейнера**:

Момент инерции I относительно произвольной оси z равен моменту инерции относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс С тела, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_C + ma^2 \tag{18}$$

◄ **теорема Штейнера**

Таким образом, если известен момент инерции I_C, то нахождение момента инерции I элементарно.

Пример

Например, момент инерции тонкого стержня (массы m и длины l) относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равен

$$I = I_C + ma^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

Здесь I_C взято из предыдущей таблицы (для стержня вращающего относительно центра масс), расстояние между осями a в данном случае равно половине длины стержня

Запишем **основное уравнение динамики вращения твердого тела** с неподвижной осью вращения. Это уравнение легко получить, как следствие (7), если продифференцировать (16) по времени, тогда

$$I\varepsilon_z = M_z,$$

где M_z – суммарный момент всех внешних сил относительно оси вращения;

ε_z – проекция углового ускорения на ось вращения.

Из этого уравнения, в частности, видно, что момент инерции I определяет **инерционные свойства** твердого тела при вращении: при одном и том же значении момента сил тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение.

То есть, можно сказать, что момент инерции является аналогом массы для вращательного движения.

7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Пользуясь определением момента инерции, найдем выражение для кинетической энергии вращающегося тела.

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Z. Разобьем тело на систему материальных точек. Кинетическая энергия каждой материальной точки

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Производя замену $v_i = r_i \cdot \omega$ (ω – угловая скорость вращения, одинаковая для всех точек тела), получим

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Так как, кинетическая тоже обладает свойством аддитивности, то кинетическая энергия тела есть сумма кинетических энергий его частей

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 ,$$

где $\sum m_i r_i^2$ – момент инерции I_z тела относительно оси Z.

Итак, кинетическая энергия тела вращающегося относительно неподвижной оси

$$T = \frac{I_z \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

Данное выражение аналогично выражению для кинетической энергии тела, движущегося поступательно $T = \dfrac{mv^2}{2}$.

8. СВЯЗЬ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Таким образом, можно видеть, что между величинами, определяющими вращательное и поступательное движение, существует определенная связь, которую можно представить следующей таблицей.

СВЯЗЬ ДИНАМИКИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ		
Движение	**ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ**	**ВРАЩАТЕЛЬНОЕ**
Координата тела	$\mathbf{r}$, *радиус-вектор*	φ, *угол поворота*
При равномерном движении	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot t$	$\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot t$
При равноускоренном движении	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{\mathbf{a} \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot t + \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot t^2}{2}$
Скорость изменения координаты	$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, *скорость*	$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$, *угловая скорость*
При равномерном движении	$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$
При равноускоренном движении	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t$	$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot t$
Быстрота изменения скорости	$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, *ускорение*	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$, *угловое ускорение*
При равноускоренном движении	$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$
Мера инертности тела	$m = \sum m_i$, *масса*	$I = \sum I_i = \sum (m_i \cdot r_i^2)$, *момент инерции*
Количество движения	$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}$, *импульс*	$\mathbf{L} = m \cdot \boldsymbol{\omega}$, *момент импульса*
Мера взаимодействия тел	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, *сила*	$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}$, *момент силы*
Кинетическая энергия	$T = \frac{mv^2}{2}$	$T = \frac{I\omega^2}{2}$
Основное уравнение динамики	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$