Лекция №4
Законы сохранения.

План:

1. О законах сохранения
2. Закон сохранения импульса
3. Движение частицы переменной массы
4. Работа и мощность
5. Потенциальная энергия
6. Механическая энергия частицы
7. Закон сохранения энергии
8. Абсолютно упругий и неупругий удар
9. Закон сохранения момента импульса

1. О законах сохранения

Любое тело (или совокупность тел) можно рассматривать как систему материальных точек, или частиц. Если в системе с течением времени происходят какие-то процессы, то говорят, что изменяется ее состояние. Состояние системы можно определить задав положения (координат) и скорости всех ее частиц.

Зная законы действующих на частицы системы сил и состояние системы в некоторый начальный момент времени, можно с помощью уравнений движения предсказать ее дальнейшее поведение, т. е. найти состояние системы в любой момент времени. Так, например, решается задача о движении планет Солнечной системы.

Однако детальное рассмотрение поведения системы с помощью уравнений движения часто бывает настолько затруднительно (например, из-за сложности самой системы), что довести решение до конца представляется практически невозможным. А в тех случаях, когда законы действующих сил вообще неизвестны, такой подход оказывается в принципе неосуществимым.

При таком положении естественно возникает вопрос: нет ли каких-либо общих принципов, которые позволили бы иначе подойти к решению задачи, и помогли бы в какой-то степени обойти подобные трудности.

Оказывается, такие принципы есть. Это так называемые законы сохранения.

Как уже было сказано, при движении системы ее состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие величины - функции состояния, которые обладают весьма важным и замечательным свойством сохраняться во времени. Их также называют **интегралами движения**.

Среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют **энергия**, **импульс** и **момент импульса**.

Эти три величины имеют важное общее свойство **аддитивности**: их значение для системы, состоящей из частей, взаимодействие которых пренебрежимо мало, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности (впрочем, для импульса и момента импульса свойство аддитивности выполняется и при наличии взаимодействия). Именно свойство аддитивности и придает этим трем величинам особенно важную роль.

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса относятся к числу тех наиболее фундаментальных принципов физики, значение которых трудно переоценить. Роль этих законов особенно возросла после того, как выяснилось, что они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы.

Важнейшая роль законов сохранения как инструмента исследования обусловлена рядом причин.

1. Законы сохранения не зависят ни от траекторий частиц, ни от характера действующих сил.

Поэтому они позволяют получить ряд весьма общих и существенных заключений о свойствах различных механических процессов, не вникая в их детальное рассмотрение с помощью уравнений движения. Если, например, выясняется, что такой-то процесс противоречит законам сохранения, то сразу можно утверждать: этот процесс невозможен, и бессмысленно пытаться его осуществить.

2. Тот факт, что законы сохранения не зависят от характера действующих сил, позволяет использовать их даже тогда, когда силы вообще неизвестны.

В этих случаях законы сохранения являются единственным и незаменимым инструментом исследования. Так, например, обстоит дело в физике элементарных частиц.

3. Даже в тех случаях, когда силы в точности известны, законы сохранения могут оказать существенную помощь при решении многих задач о движении частиц.

Хотя все эти задачи могут быть решены с помощью уравнений движения (в этом отношении из законов сохранения мы не получим никакой дополнительной информации), привлечение законов сохранения очень часто позволяет получить решение наиболее простым и изящным путем, избавляя нас от громоздких и утомительных расчетов. Поэтому при решении новых задач обычно принято придерживаться следующего порядка: прежде всего один за другим применяют соответствующие законы сохранения и, только убедившись, что этого недостаточно, переходят затем к решению с помощью уравнений движения.

Аддитивность (лат. *additivus* — прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям, в некотором классе возможных разбиений объекта на части.

Например, аддитивность объёма означает, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей.

Примеры аддитивных величин:

- Энергия;
- Импульс;
- Энтропия;
- Мощность;
- Электрический заряд;

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса имеют, как выяснилось впоследствии, весьма глубокое происхождение, связанное с фундаментальными свойствами времени и пространства - однородностью и изотропностью.

А именно: закон сохранения энергии связан с **однородностью времени**, а законы сохранения импульса и момента импульса - соответственно с **однородностью** и **изотропностью пространства**.

Сказанное следует понимать в том смысле, что перечисленные законы сохранения можно получить из второго закона Ньютона, если к нему присоединить соответствующие свойства симметрии времени и пространства.

2. Закон сохранения импульса

Импульс частицы (количество движения) - это произведение ее массы на скорость.

◄ **Импульс тела**

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Запишем основное уравнение динамики через импульс:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

т. е. производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.

Из (1), в частности, следует что, если $\mathbf{F}=0$, то $\mathbf{p}=const$.

То есть при такой записи видна четкая логическая связь между 1-м и 2-м законами Ньютона: первый закон утверждает, что импульс является сохраняющейся в отсутствии взаимодействия мерой движения, а второй описывает ее изменение при наличии взаимодействия.

Заметим, что в неинерциальной системе отсчета результирующая сила $\mathbf{F}$ включает в себя не только силы взаимодействия данной частицы с другими телами, но и силы инерции.

Уравнение (1) позволяет найти приращение импульса частицы за любой промежуток времени, если известна зависимость силы от времени. Действительно, из (1) следует, что элементарное приращение импульса частицы за промежуток времени dt есть $d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt$.

Последняя величина называется **импульсом силы**

◄ **Импульс силы**

$$\mathbf{F}dt$$

Проинтегрировав это выражение по времени, найдем приращение импульса частицы за конечный промежуток времени t:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^t \mathbf{F}dt \qquad (2)$$

Если сила $\mathbf{F} = const$, то вектор $\mathbf{F}$ можно вынести из-под интеграла и тогда

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}\Delta t.$$

◄ **Закон изменения импульса частицы**

Это есть **закон изменения импульса частицы**:

Приращение импульса частицы за любой промежуток времени равно импульсу действующей на нее силы за то же время.

Перейдем к рассмотрению более сложного случая. Рассмотрим произвольную **систему частиц**. Введем понятие **импульса системы** как векторной суммы импульсов ее отдельных частиц:

◄ **Импульс системы тел**

$$\mathbf{p}_{сис} = \sum_i \mathbf{p}_i, \qquad (3)$$

где $\mathbf{p}_i$ – импульс частицы.

Импульс системы - величина аддитивная, т. е. импульс системы равен сумме импульсов ее отдельных частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет.

Найдем физическую величину, которая определяет изменение импульса системы. Для этого продифференцируем соотношение (3) по времени:

$$\frac{d\mathbf{p}_{сис}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

Согласно (1),

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_k (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i),$$

где $\mathbf{F}_{ik}$ - силы, действующие на частицу со стороны других частиц системы, которые обычно называют **внутренние силы**;

$\mathbf{F}_i$ - сила, действующая на эту же частицу со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему, т.е. **равнодействующая внешних сил**.

Подставив последнее выражение в предыдущее, получим

$$\frac{d\mathbf{p}_{сис}}{dt} = \sum_i \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \mathbf{F}_i$$

В этом равенстве двойная сумма справа - это *сумма всех внутренних сил*. В соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия между частицами системы попарно одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Поэтому результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит, *равна нулю и векторная сумма всех внутренних сил*. В результате последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{p}_{сис}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{4}$$

где $\mathbf{F}$ - результирующая всех внешних сил $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$.

Уравнение (4) означает: производная импульса системы по времени равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Как и в случае одной частицы, из уравнения (4) следует, что приращение импульса системы за конечный промежуток времени есть

$$\mathbf{p}_{сис2} - \mathbf{p}_{сис1} = \int_0^t \mathbf{F}\,dt \tag{5}$$

◄ **Закон изменения импульса системы**

Это есть **закон изменения импульса системы**:

Приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Уравнения (4) и (5) справедливы как в инерциальной, так и в неинерциальной системах отсчета, если в неинерциальной системе отсчета учесть и действие *сил инерции*, играющих роль внешних сил, т. е. под $\mathbf{F}$ в этих уравнениях надо понимать сумму $\mathbf{F}_{вз} + \mathbf{F}_{инер}$, где результирующая всех внешних сил взаимодействия – это $\mathbf{F}_{вз}$, а результирующая всех сил инерции обозначена $\mathbf{F}_{инер}$.

Из уравнения (4) можно сделать важный вывод – импульс системы может изменяться под действием только внешних сил. Внутренние силы не могут изменить импульс системы независимо от их конкретного вида.

Замкнутая система – система, на которую не действуют внешние силы.

Отсюда непосредственно вытекает и другой важный вывод - **закон сохранения импульса**:

В инерциальной системе отсчета импульс замкнутой системы частиц остается постоянным, т. е. не меняется со временем

$$\mathbf{p}_{сис} = \sum_i \mathbf{p}_i(t) = const \qquad (6)$$

◄ **Закон сохранения импульса**

При этом импульсы отдельных частиц или частей замкнутой системы могут меняться со временем, что, и подчеркнуто в последнем выражении. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение импульса одной части системы равно убыли импульса оставшейся части системы.

Другими словами, отдельные части замкнутой системы могут только обмениваться импульсами. Обнаружив в некоторой системе приращение импульса, можно утверждать, что это приращение произошло за счет убыли импульса в окружающих телах.

В этом смысле уравнение (4) и (5) следует рассматривать как более общую формулировку закона изменения импульса, формулировку, в которой указана причина изменения импульса у незамкнутой системы - действие других тел, то есть внешних сил. Сказанное справедливо, разумеется, только по отношению к инерциальным системам отсчета.

Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии, что результирующая всех внешних сил равна нулю. Это непосредственно вытекает из уравнений (4) и (5). В практическом отношении сохранение импульса в этих случаях представляет особый интерес, ибо дает возможность получать достаточно простым путем ряд заключений о поведении системы, не вникая в детальное рассмотрение процесса.

Кроме того, у незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция на некоторое направление. Это бывает тогда, когда проекция результирующей внешней силы $\mathbf{F}$ на направление x равна нулю, т. е. вектор $\mathbf{F}$ перпендикулярен ему. Действительно, спроектировав уравнение (4), получим

$$\frac{dP_x}{dt} = F_x \qquad (7)$$

откуда следует, что если $F_x = 0$, то $P_x = const$. Например, при движении системы в однородном поле сил тяжести сохраняется проекция ее импульса на любое горизонтальное направление, при любых внутренних процессах в системе.

3. Движение частицы переменной массы

Во многих задачах имеет место случай, когда масса тела изменяется в процессе движения за счет непрерывного отделения или присоединения вещества (ракета, реактивный самолет, платформа, нагружаемая на ходу, и др.). Определим уравнение движения такого тела.

Пусть в некоторый момент t времени масса движущейся частицы A равна m, а присоединяемая (или отделяемая) масса имеет скорость $\mathbf{u}$ относительно этой частицы.

Введем вспомогательную инерциальную K-систему отсчета, скорость которой такова же, как и скорость тела A в данный момент t. Это значит, что в момент частица A покоится в этой системе. Предположим, что за промежуток времени от t до $t+dt$ частица A приобретает в K-системе импульс $m \cdot d\mathbf{v}$. Этот импульс частица A получит, во-первых, вследствие присоединения (отделения) массы dm, которая приносит (уносит) импульс $dm \cdot \mathbf{u}$, во-вторых, вследствие действия силы $\mathbf{F}$ со стороны окружающих тел или силового поля. Таким образом, можно записать, что

$$m \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot dt + dm \cdot \mathbf{u}$$

где положительное значение dm соответствует присоединению массы, а отрицательное - отделению.

Поделив это выражение на dt, получим

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (8)$$

◄ **Уравнение Мещерского**

где $\mathbf{u}$ – скорость присоединяемого (или отделяемого) вещества относительно рассматриваемого тела.

Это уравнение является **основным уравнением динамики материальной точки с переменной массой**. Его называют **уравнением Мещерского**.

Будучи выведенным в одной инерциальной системе отсчета, это уравнение в силу принципа относительности верно и в любой другой инерциальной системе. Заметим, что если система отсчета неинерциальная, то под силой $\mathbf{F}$ следует понимать результирующую как сил взаимодействия данного тела с окружающими телами, так и сил инерции.

Последний член уравнения (8) носит название **реактивной силы**.

$$\mathbf{F}_{реакт} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u}$$

◄ **Реактивная сила**

Эта сила возникает в результате действия на данное тело присоединяемой (или отделяемой) массы. Если масса присоединяется

$\frac{dm}{dt} > 0$, то и вектор $\mathbf{F}_{реакт}$ совпадает по направлению с вектором относительной скорости $\mathbf{u}$. Если же она отделяется $\frac{dm}{dt} < 0$, то и вектор $\mathbf{F}_{реакт}$ противоположен вектору $\mathbf{u}$.

Уравнение Мещерского по своей форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки постоянной массы: слева – произведение массы тела на ускорение, справа - действующие на него силы, включая реактивную силу. Однако в случае переменной массы нельзя внести массу m под знак дифференцирования и представить левую часть уравнения как производную по времени от импульса, так как $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$.

4. Работа и мощность

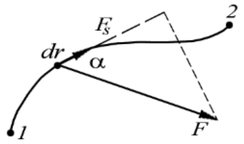


Рис.1

Изучение законов сохранения продолжим изучением закона изменения и сохранения энергии, введя понятие энергии через понятие работы.

Пусть частица под действием силы совершает перемещение по некоторой траектории *1-2* (**рис.1**).

В общем случае сила $\mathbf{F}$ в процессе движения частицы может изменяться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим, как показано на **рис.1**, элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, в пределах которого силу $\mathbf{F}$ можно считать постоянной.

Единицей измерения работы в системе СИ служит **Джоуль, Дж.**

Действие силы на перемещении характеризуют работой

Элементарная работа силы $\mathbf{F}$ равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на перемещение $d\mathbf{r}$

Ее можно представить и в другом виде:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot \cos\alpha \cdot ds = F_s ds$$

где α - угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$, $ds = |d\mathbf{r}|$ - элементарный путь, проекция вектора $\mathbf{F}$ на вектор $d\mathbf{r}$ обозначена F_s (**рис.1**).

Итак, элементарная работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{r}$

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_s ds \qquad (9)$$

◄ **Элементарная работа**

Величина dA - алгебраическая: в зависимости от угла между векторами силы $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$ или от знака проекции вектора силы на вектор перемещения она может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю, если $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$ т.е. $F_s = 0$.

Суммируя (интегрируя) выражение (9) по всем элементарным участкам пути от точки *1* до точки *2*, найдем работу силы $\mathbf{F}$ на данном перемещении:

$$A=\int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_1^2 F_s ds \qquad (10)$$

◀ **Работа**

Выражению (10) можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график F_s как функцию положения частицы на траектории. Пусть, например, этот график имеет вид, показанный на **рис.2**.

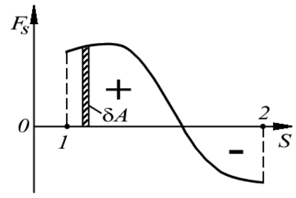


Рис. 2

Из этого рисунка видно, что *элементарная работа* A численно равна *площади заштрихованной полоски*, а *работа* A на пути от точки *1* до точки *2* - *площади фигуры*, ограниченной кривой, ординатами *1* и *2* и осью *S*. При этом площадь фигуры над осью S берется со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью *S* - со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

До сих пор речь шла о работе одной силы. Если же на частицу в процессе движения действуют несколько сил, результирующая которых $\mathbf{F}=\sum \mathbf{F}_i$ то нетрудно показать, что работа результирующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности на том же перемещении. Действительно,

$$A=\int(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots)d\mathbf{r}=\int \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}+\int \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}+\ldots=A_1+A_2+\ldots \qquad (11)$$

Введем в рассмотрение новую величину - **мощность**. Она используется для характеристики скорости, с которой совершается работа.

Мощность - это работа, совершаемая силой за единицу времени.

Мощность	
Запорожская АЭС, крупнейшая в Европе	6 ГВт
Красноярская ГЭС, крупнейшая в России	6 ГВт
Гусиноозерская ГРЭС	1 100 МВт
Улан-Удэнская ТЭЦ-1	120 МВт
Двигатель «Камаз» 740.11-240	176 кВт
Чайник электрический, 1,7л	2,2 кВт
Электроплита	1,7 кВт
Лампа накаливания	100 Вт
Паяльник	25 Вт

Единица мощности в системе СИ - **Ватт, Вт**

Внесистемная единица мощности – **лошадиная сила, л.с.**

1 л.с. = 735,49875 Вт

Лошадиная сила определяется как мощность, затрачиваемая для поднятия груза массой в 75 кг на высоту 1 метр за 1 секунду при стандартном ускорении свободного падения (9,80665 м/с^2)

Если за промежуток времени dt сила $\mathbf{F}$ совершает работу $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени, есть

$$N=\frac{\mathbf{F}d\mathbf{r}}{dt}$$

◀ **Мощность**

Учитывая, что $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$, получим

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (12)$$

◄ **Мощность постоянной силы**

Таким образом, мощность, развиваемая силой, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы. Как и работа, мощность - величина алгебраическая.

Зная мощность силы $\mathbf{F}$, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t. В самом деле, представив подынтегральное выражение в (2) в виде получим

$$A = \int_0^t N dt$$

Коэффициент полезного действия (КПД) – отношение полезной работы к затраченной (полученной системой).

$$\eta = \frac{A_{полез}}{A_{затрат}} 100\%$$

◄ **К.П.Д.**

Следует обратить внимание, что КПД есть безразмерная величина.

Следует также обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство. Когда говорят о работе (или мощности), то необходимо в каждом конкретном случае четко указывать или представлять себе, работа *какой именно силы* (или сил) имеется в виду. В ином случае, как правило, неизбежны недоразумения.

5. Потенциальная энергия

Силовым полем (полем сил) называют область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке.

Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа).

Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют стационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.

Работа, которую совершают силы поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2*, зависит, вообще говоря, от пути. Однако среди стационарных силовых полей имеются такие, в которых эта работа не зависит от пути между точками *1* и *2*.

Введем определение:

Стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек, называется **потенциальным**, а сами силы - **консервативными**.

Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным, а силы поля называют **неконсервативными**. К числу таких сил принадлежит, например, сила трения, так как работа этой силы зависит в общем случае от пути.

Покажем, что в потенциальном поле работа сил поля на любом замкнутом пути равна нулю. Действительно, любой замкнутый путь (**рис.3**) можно разбить произвольно на две части: *1a2* и *2b1*.

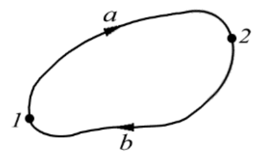


Рис.3

Так как поле потенциально, то, по условию

$$A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$A_{12}^{(a)} = -A_{21}^{(b)}$$

Поэтому

$$A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = A_{12}^{(a)} - A_{12}^{(b)} = 0$$

Наоборот, если работа сил поля на любом замкнутом пути равна нулю, то и работа этих сил на пути между произвольными точками *1* и *2* от формы пути не зависит, т. е. поле потенциально.

Таким образом, равенство нулю работы сил поля на любом замкнутом пути есть необходимое и достаточное условие независимости работы от формы пути, и может считаться отличительным признаком любого потенциального поля сил.

Введем понятие *потенциальной энергии* частицы в поле.

То, что работа сил потенциального поля зависит только от начального и конечного положений частицы, дает возможность ввести чрезвычайно важное понятие потенциальной энергии.

Представим себе, что мы перемещаем частицу в потенциальном поле сил из разных точек P в фиксированную точку O. Так как работа сил поля не зависит от формы пути, то остается зависимость ее только от положения точки P (при фиксированной точке O). А это значит, что данная работа будет некоторой функцией радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки P.

Обозначив эту функцию, запишем

$$A_{P0} = \int_P^0 \mathbf{F}d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}) \qquad (13)$$

Функцию $U(\mathbf{r})$ называют **потенциальной энергией частицы** в данном поле.

Потенциальная энергия – энергия характеризующая способность тела совершать работу в силовом поле.

Теперь найдем работу сил поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2* (**рис.4**). Так как работа не зависит от пути, выберем путь, проходящий через точку *O*.

Тогда работа на пути *1O2* может быть представлена в виде

$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$$

или с учетом (13)

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = U_1 - U_2 \qquad (14)$$

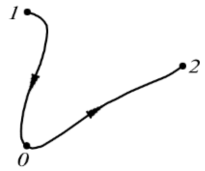


Рис. 4

Выражение, стоящее справа, есть убыль потенциальной энергии, т. е. разность значений потенциальной энергии частицы в начальной и конечной точках пути.

Таким образом, работа сил поля на пути *1-2* равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле.

Мат. справка

Изменение какой-либо произвольной величины *X* можно характеризовать либо ее *приращением*, либо *убылью*.

Приращением величины *X* называют разность конечного x_2 и начального значений x_1 этой величины:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Убылью величины *X* называют разность ее начального и конечного значений:

$$x_1 - x_2 = -\Delta x$$

т. е. убыль величины X равна ее приращению, взятому с обратным знаком.

Очевидно, частице, находящейся в точке O поля, всегда можно приписать любое заранее выбранное значение потенциальной энергии. Это соответствует тому обстоятельству, что путем измерения работы может быть определена лишь разность потенциальных энергий в двух точках поля, но не ее абсолютное значение. Однако как только фиксирована потенциальная энергия в какой-либо точке, значения ее во всех остальных точках поля однозначно определяются формулой (14).

Формула (14) дает возможность найти выражение для любого потенциального поля сил. Для этого достаточно вычислить работу, совершаемую силами поля на любом пути между двумя точками, и представить ее в виде убыли некоторой функции, которая и есть потенциальная энергия.

Потенциальная энергия тела		
В поле упругой силы (потенциальная энергия упруго деформированного тела)	$U(r) = \dfrac{kr^2}{2}$	(15)

В поле точечной массы	$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{2}$	(16)
В однородном поле сил тяжести	$U(h) = mgh$	(17)

Еще раз подчеркнем, что потенциальная энергия - это функция, которая определяется с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно, ибо во все формулы входит только разность значений в двух положениях частицы. Поэтому произвольная постоянная, одинаковая для всех точек поля, выпадает. В связи с этим ее обычно опускают, что и сделано в трех предыдущих выражениях.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Потенциальную энергию следует относить не к частице, а к системе взаимодействующих между собой частицы и тел, вызывающих силовое поле. При данном характере взаимодействия потенциальная энергия взаимодействия частицы с данными телами зависит только от положения частицы относительно этих тел.

Определим связь потенциальной энергии и силы поля.

Ранее было показано, что при перемещении частицы из одной точки потенциального поля в другую работа, которую производят силы поля, может быть представлена как убыль потенциальной энергии частицы, т.е.

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = U_1 - U_2$$

$$\mathbf{F} d\mathbf{r} = dA_{12} = U_1 - U_2 = -dU \tag{18}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{d\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) \tag{19}$$

Мат. справка

Величину, стоящую в скобках, называют **градиентом** скалярной функции U и обозначают $gradU$ или ∇U, где значок "набла" означает символический векторный оператор

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Градие́нт (от лат. *gradiens* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный быстроте роста этой величины в этом направлении.

Например, если взять в качестве высоту поверхности Земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

Таким образом, связь между силой поля и потенциальной энергией как функцией координат можно представить в следующем компактном виде:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \qquad (20)$$

◄ Связь силы и потенциальной энергии

т. е. сила поля равна со знаком минус градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке поля.

6. Механическая энергия частицы

Рассмотрим понятие кинетической энергии частицы. Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\mathbf{F}$. Найдем элементарную работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$.

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \qquad (21)$$

Отсюда видно, что работа результирующей силы идет на приращение некоторой величины стоящей в скобках, которую называют **кинетической энергией** частицы.

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} \qquad (22)$$

◄ Кинетическая энергия

Кинетическая энергия – энергия, зависящая от скоростей движения тел системы.

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$E_{кин1} - E_{кин2} = A_{12} \qquad (23)$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении.

Если $A_{12} > 0$ то $E_{кин2} > E_{кин1}$ т. е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если же $A_{12} < 0$ то $E_{кин2} < E_{кин1}$, т. е. кинетическая энергия уменьшается.

Уравнение (23) справедливо в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. В последних кроме сил, действующих на рассматриваемую частицу со стороны каких-то тел (сил взаимодействия), необходимо учитывать и силы инерции. Поэтому под работой (мощностью) в этих уравнениях надо понимать алгебраическую сумму работ (мощностей) как сил взаимодействия, так и сил инерции.

Теперь можно ввести понятие *полной механической энергии* частицы.

Согласно (21), приращение кинетической энергии частицы равно элементарной работе результирующей $\mathbf{F}$ всех сил, действующих на частицу.

Что это за силы? Если частица находится в интересующем нас потенциальном поле, то на нее действует консервативная сила со стороны этого потенциального поля. Кроме того, на частицу могут действовать и другие силы, имеющие иное происхождение. Назовем их **сторонними силами**.

Таким образом, результирующая всех сил, действующих на частицу, может быть представлена в виде.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{конс} + \mathbf{F}_{сторон}$$

Работа всех этих сил идет на приращение кинетической энергии частицы:

$$dE_{кин} = dA_{конс} + dA_{сторон}$$

Работа сил поля равна убыли потенциальной энергии частицы, т. е. $dA_{конс} = -dU$. Подставив это выражение в предыдущее и перенеся член dU влево, получим

$$dE_{кин} + dU = d(E_{кин} + U) = dA_{сторон}$$

Т.е. работа сторонних сил идет на приращение величины $E_{кин} + U$. Эту величину - сумму кинетической и потенциальной энергии - называют **полной механической энергией частицы** в поле:

$$E = E_{кин} + U \qquad (24)$$

Полная механическая энергия тела

Заметим, что полная механическая энергия E , как и потенциальная, определяется с точностью до прибавления несущественной произвольной постоянной.

7. Закон сохранения энергии

Итак, приращение полной механической энергии частицы на элементарном перемещении равно

$$dE = dA_{сторон}$$

на конечном перемещении из точки *1* в точку *2*

$$E_2 - E_1 = A_{сторон} \qquad (25)$$

Закон изменения энергии тела

Это есть **закон изменения энергии частицы:**

Приращение полной механической энергии частицы на некотором пути равно алгебраической сумме работ всех сторонних сил, действующих на частицу на том же пути.

Если $A_{сторон} > 0$, то полная механическая энергия частицы увеличивается, если же $A_{сторон} < 0$, то уменьшается.

Итак, мы установили, что полная механическая энергия частицы может измениться под действием только сторонних сил.

Отсюда непосредственно вытекает **закон сохранения полной механической энергии частицы** во внешнем поле:

Если сторонние силы отсутствуют или таковы, что алгебраическая сумма их мощностей равна нулю в течение интересующего нас времени, то полная механическая энергия частицы остается постоянной за это время.

$$E = E_{кин} + U = const \qquad (26)$$

◄ **Закон сохранения энергии тела**

Теперь перейдем к *системе частиц*.

Систему частиц, на которую не действуют никакие посторонние тела или их воздействие пренебрежимо мало, называют **замкнутой** или **изолированной**.

Проведем классификацию сил по их свойствам.

Известно, что частицы рассматриваемой системы могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не входящими в данную систему.

В соответствии с этим силы взаимодействия между частицами системы называют **внутренними**, а силы, обусловленные действием других тел, не входящих в данную систему, - **внешними**. В неинерциальной системе отсчета к последним нужно относить и силы инерции.

Кроме того, все силы делят на потенциальные и непотенциальные.

Диссипа́ция (лат. dissipatio) — рассеивание.

Диссипация энергии — переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. д.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном итоге — в тепло.

Потенциальными называют силы, зависящие при данном характере взаимодействия только от конфигурации механической системы.

Работа этих сил, как было показано, равна убыли потенциальной энергии системы.

К **непотенциальным** силам относятся так называемые **диссипативные** силы - это силы трения и сопротивления, а также **энергетические силы**, вызывающие увеличение механической энергии системы за счет других видов энергии (например, взрыв артиллерийского снаряда).

Важной особенностью данных сил является то, что суммарная работа внутренних диссипативных сил рассматриваемой системы отрицательна, а энергетических сил - положительна, причем в любой системе отсчета.

В этом случае (25) примет следующий вид

$$E_2 - E_1 = A_{внеш} + A_{внутр}^{непотен} \qquad (27)$$

◄ **Закон изменения энергии системы тел**

Это закон **изменения энергии системы**:

Механическая энергия системы может изменяться под действием как внешних сил, так и внутренних непотенциальных сил (точнее говоря, под действием алгебраической суммы работ всех этих сил).

Отсюда непосредственно вытекает и другой важный вывод - **закон сохранения механической энергии**:

В инерциальной системе отсчета механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой нет непотенциальных сил, сохраняется в процессе движения

$$E = E_{кин} + U = const$$

Закон сохранения энергии системы тел

Такую систему называют **консервативной**.

Заметим, что при движении замкнутой консервативной системы сохраняется именно полная механическая энергия, кинетическая же и потенциальная в общем случае изменяются. Однако эти изменения происходят всегда так, что приращение одной из них в точности равно убыли другой, т. е. Ясно, что это положение справедливо только в инерциальных системах отсчета.

Из уравнения (27) следует, что если замкнутая система неконсервативна, т. е. в ней имеются непотенциальные силы, то механическая энергия такой системы изменяется, а в случае диссипативных сил убывает

Более глубокое осмысливание этого вопроса привело к фундаментальному выводу о существовании в природе **универсального закона сохранения энергии**:

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи.

При этом понятие энергии пришлось расширить введением новых форм ее (помимо механической) - энергия электромагнитного поля, химическая энергия, ядерная и др.

Универсальный закон сохранения энергии охватывает, таким образом, и те физические явления, на которые законы Ньютона не распространяются. Поэтому он не может быть выведен из этих законов, а должен рассматриваться как самостоятельный закон, представляющий собой одно из наиболее широких обобщений опытных фактов.

8. Абсолютно упругий и неупругий удар.

При решении большинства задач закон сохранения энергии применяют обычно совместно с законом сохранения или импульса, или момента импульса, или с тем и другим одновременно.

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

Удар (соударение) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильярдных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. д. Силы взаимодействия между сталкивающимися телами *(ударные* или *мгновенные силы)* столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара.**

Удар называется **центральным,** если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.

Мы будем рассматривать только *центральные* абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это *идеализированный случай).*

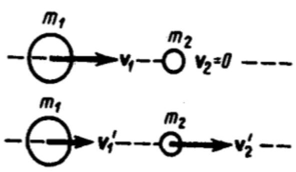


Рис. 5

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Обозначим скорости шаров массами m_1 и m_2 до удара через v_1 и v_2, после удара—через v_1' и v_2' (**рис. 5**). В случае прямого центрального удара векторы скоростей шаров до и после удара лежат на прямой линии, соединяющей их центры. Проекции векторов скорости на эту линию равны модулям скоростей. Их направления учтем знаками: положительное значение припишем движению вправо, отрицательное — движению влево.

При указанных допущениях законы сохранения имеют вид

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (28)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \qquad (29)$$

Произведя соответствующие преобразования в выражениях (28) и (29), получим

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \qquad (30)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \qquad (31)$$

откуда

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \qquad (32)$$

Решая уравнения (30) и (32), находим

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (33)$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (34)$$

◄ **Скорость тел после абсолютно упругого удара**

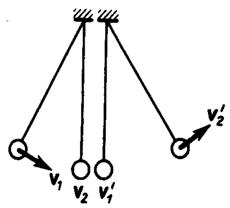
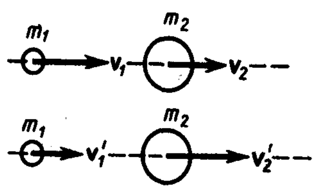
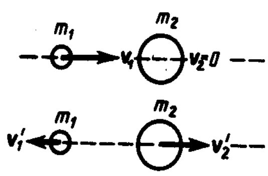
Разберем несколько примеров.

1. При $v_2=0$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (35)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (36)$$

Проанализируем выражения (35) в (36) для двух шаров различных масс:

а) $m_1=m_2$. Если второй шар до удара висел неподвижно ($v_2=0$), то после удара остановится первый шар ($v_1' = 0$), а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара ($v_2' = v_1$)	
б) $m_1>m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($v_1' < v_1 < v_1$). Скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара ($v_2' > v_1'$)	
в) $m_1<m_2$. Направление движения первого шара при ударе изменяется — шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью, т. е. $v_2' < v_1$	

г) $m_2 >> m_1$ (например, столкновение шара со стеной). Из уравнений следует, что $v_1' = -v_1$, $v_2' \approx \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$	

2. При $m_1 = m_2$ выражения (35) и (36) будут иметь вид

$$v_1' = v_2, \; v_2' = v_1$$

т. е. шары равной массы «обмениваются» скоростями.

Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (**рис.6**).

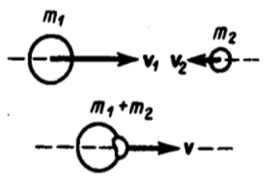


Рис. 6

Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости до удара v_1 и v_2, то, используя закон сохранения импульса, можно записать

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

где v — скорость движения шаров после удара. Тогда

◄ **Скорость тел после абсолютно неупругого удара**

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (37)$$

Выясним, как изменяется кинетическая энергия шаров при центральном абсолютно неупругом ударе. Так как в процессе соударения шаров между ними действуют силы, зависящие не от самих деформаций, а от их скоростей, то мы имеем дело с силами, подобными силам трения, поэтому закон сохранения механической энергии не должен соблюдаться. Вследствие деформации происходит «потеря» кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии. Эту «потерю» можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара:

$$\Delta T = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

Используя (37), получаем

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad \Delta T = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

Когда $m_2 >> m_1$ (масса неподвижного тела очень большая), то $v << v_1$ и почти вся кинетическая энергия тела при ударе переходит в другие формы энергии. Поэтому, например, для получения значительной деформации наковальня должна быть массивнее молотка. Наоборот, при забивании гвоздей в стену масса молотка должна быть гораздо большей *(m_1>>m_2)*, тогда $v \approx v_1$ и практически вся энергия затрачивается на возможно большее перемещение гвоздя, а не на остаточную деформацию стены.

Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.

9. Закон сохранения момента импульса

Запишем уравнение динамики поступательного движения

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \qquad (38)$$

Где $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$ - суммарный момент всех внешних сил.

Уравнение (38) утверждает: производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил.

Из уравнения следует, что приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_0^t \mathbf{M} dt \qquad (39)$$

◄ **Закон изменения момента импульса**

Это **закон изменения момента импульса**:

Приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Таким образом, получен важный вывод: согласно уравнению (38), момент импульса системы может изменяться только под действием суммарного момента всех внешних сил.

Отсюда непосредственно вытекает и другой важный вывод - **закон сохранения момента импульса**:

В инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, т.е, не меняется со временем.

Таким образом, в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i(t) = const$$

◄ **Закон сохранения момента импульса**

При этом моменты импульса отдельных частей или частиц замкнутой системы могут изменяться со временем, что и подчеркнуто в последнем выражении. Однако эти изменения всегда происходят так, что приращение момента импульса одной части системы равно убыли момента импульса ее другой части (конечно, относительно одной и той же точки системы отсчета).

До сих пор при выводе закона сохранения момента импульса мы опирались на справедливость законов Ньютона. А как обстоит дело в системах, не подчиняющихся этим законам, например в системах с электромагнитным излучением, в атомах, ядрах и др.?

Учитывая громадную роль, которую играет закон сохранения момента импульса в механике, в физике понятие момента импульса расширяют на немеханические системы, которые не подчиняются законам Ньютона, и постулируют закон сохранения момента импульса для всех физических процессов.

Такой расширенный закон сохранения момента импульса уже *не является следствием законов Ньютона*, а представляет собой *самостоятельный общий принцип*, являющийся обобщением опытных фактов.

Наряду с законами сохранения энергии и импульса закон сохранения момента импульса является одним из важнейших фундаментальных законов природы.

10. ЛИТЕРАТУРА

1. *Трофимова Т.И.*
Курс физики. – М.: Академия, 2010. – 560 с.

2. *Савельев И.В.*
Курс общей физики. В 5 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. – М.: Лань, 2011. – 348 с.

3. *Детлаф А. А., Яворский Б.М.*
Курс физики. – М.: Академия, 2009. – 720 с.

4. *Сивухин Д.В.*
Общий курс физики. В 5 томах. Том 3. Электричество. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 656 с.

5. *Ваганова Т.Г.*
Физика. Практикум по решению задач. Часть I: Механика. Электричество. Магнетизм. – Улан-Удэ: Издательство ВСГТУ, 2009. – 114 с.

6. *Чертов А.Г, Воробьев А.А.*
Задачник по физике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 640 с.