

## Лекция 2.2

# Потенциал электростатического поля. Поле в диэлектрике

### План

1. Потенциал электростатического поля
2. Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности
3. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля
4. Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков (Поле в диэлектрике)
5. Поляризованность. Напряженность поля в диэлектрике
6. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике
7. Условия на границе раздела двух диэлектрических сред
8. Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики

### 1. ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Тело, находящееся в потенциальном поле сил (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа.

Как известно, работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд  $q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $q$  :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_2} = U_1 - U_2 \quad (1)$$

откуда следует, что потенциальная энергия заряда  $q_0$  в поле заряда  $q$  равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + const$$

Она, как и в механике, определяется неоднозначно, а с точностью до произвольной постоянной  $const$ . Если считать, что при удалении заряда в бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращается в нуль ( $U = 0$ ), то  $const = 0$  и потенциальная энергия заряда  $q_0$ , находящегося в поле заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него, равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (2)$$

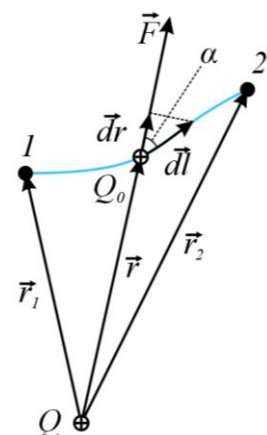


Рис. 1

◀ Потенциальная энергия в поле точечного заряда

Для одноименных зарядов  $q_0, q > 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов  $q_0, q < 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.

Если поле создается системой  $n$  точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом  $q_0$ , равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия  $U$  заряда  $q_0$ , находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий  $U_i$ , каждого из зарядов:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) вытекает, что отношение  $\frac{U}{q_0}$  не зависит от  $q_0$  и является поэтому энергетической характеристикой электростатического поля, называемой потенциалом:

$$\varphi = \frac{U}{q_0} \quad (4)$$

**Потенциал**  $\varphi$  в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Из формул (4) и (2) следует, что потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (5)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 (см. (1), (4), (5)), может быть представлена как

$$A_{12} = U_1 - U_2 = q_0(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (6)$$

т. е. равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

**Разность потенциалов** двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Единица измерения потенциала – **вольт (В)**

$$\varphi = [B]$$

Из выражения (4) следует, что единица потенциала есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж

$$1B = \frac{1Дж}{1Кл}$$

◀ **Потенциал**  
**(общая формула)**

◀ **Потенциал поля**  
**точечного заряда**

Работа сил поля при перемещении заряда  $q_0$  из точки  $1$  в точку  $2$  может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 q_0 \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (7)$$

Приравняв (6) и (7), придем к выражению для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_1^2 E_i dl, \quad (8)$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Если перемещать заряд  $q_0$  из произвольной точки за пределы поля, т. е. в бесконечность, где, по условию, потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно (6),  $A_\infty = q_0 \varphi$ , откуда

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0} \quad (9)$$

◀ Разность потенциалов

◀ Потенциал

Таким образом, **потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки поля в бесконечность.

Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Из формул (3) и (4) вытекает, что если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

◀ Потенциал поля нескольких зарядов

## 2. НАПРЯЖЕННОСТЬ КАК ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Найдем взаимосвязь между напряженностью электростатического поля, являющейся его силовой характеристикой, и потенциалом — энергетической характеристикой поля.

Работа по перемещению единичного точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и

$x_2 - x_1 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = d\varphi$ . Приравняв оба выражения, можем записать

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (10)$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по  $x$ .

Повторив аналогичные рассуждения для осей  $y$  и  $z$ , можем найти вектор  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}\right),$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей  $x, y, z$ .

Из определения градиента следует, что

$$\mathbf{E} = \text{grad}\varphi, \text{ или } \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (11)$$

Напряженность  $\mathbf{E}$  поля равна **градиенту** потенциала со знаком минус.

Знак минус определяется тем, что вектор напряженности  $\mathbf{E}$  поля направлен в сторону убывания потенциала.

Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля, как и в случае поля тяготения, пользуются **эквипотенциальными поверхностями**

**Эквипотенциальная поверхность** — поверхность, в каждой точке которой потенциал  $\varphi$  имеет одинаковое значение.

Если поле создается точечным зарядом, то его потенциал, согласно (5),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Таким образом, эквипотенциальные поверхности в данном случае — концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности в случае точечного заряда — радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности в случае точечного заряда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Линии напряженности всегда нормальны (перпендикулярны) к эквипотенциальным поверхностям.

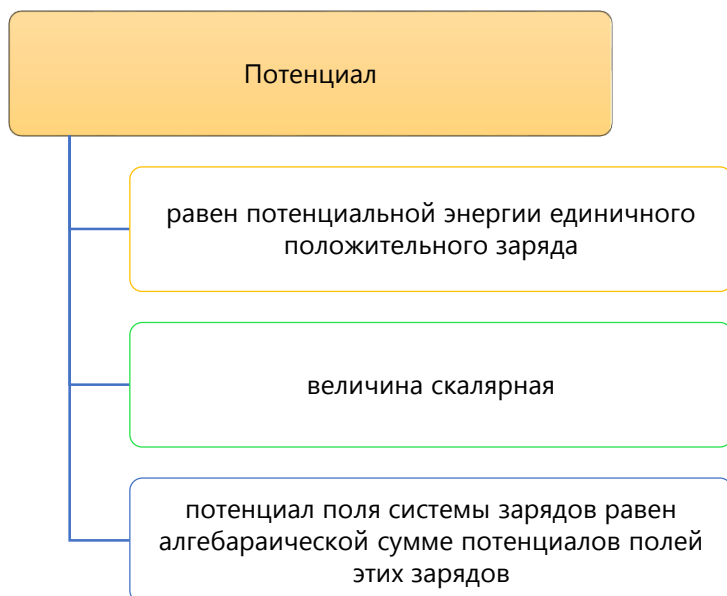
Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, вектор  $\mathbf{E}$

### ◀ Напряженность как градиент потенциала

**Градиент** (от лат. *gradientis* — шагающий, растущий) — вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.

Например, если взять в качестве высоты поверхности Земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», и своей величиной характеризовать крутизну склона.

С математической точки зрения градиент — это производная скалярной функции, определенной на векторном пространстве

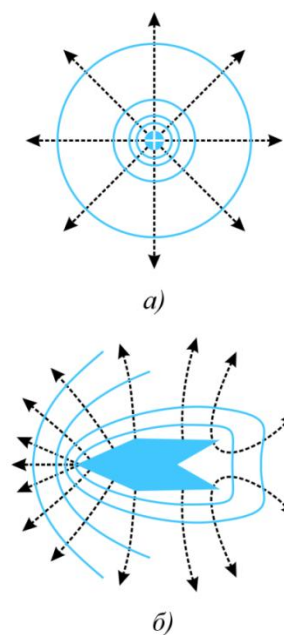


всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям, а поэтому линии вектора  $\mathbf{E}$  ортогональны этим поверхностям.

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество.

Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

Итак, зная расположение линий напряженности электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно определить в каждой точке поля модуль и направление напряженности поля. На **рис. 2** для примера показан вид линий напряженности (штриховые линии) и эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) полей положительного точечного заряда (**рис.2 а**) и заряженного металлического цилиндра, имеющего на одном конце выступ, а на другом — впадину (**рис.2 б**).



**Рис. 2.** Эквипотенциальные поверхности (синие линии), линии напряженности (черные).

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Установленная в §2 связь между напряженностью поля и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости** определяется формулой:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна (используем формулу (10))

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** определяется формулой;

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно  $d$  (см. формулу (10)), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \quad (12)$$

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности** радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  вне сферы ( $r > R$ ) вычисляется по формуле:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (13)$$

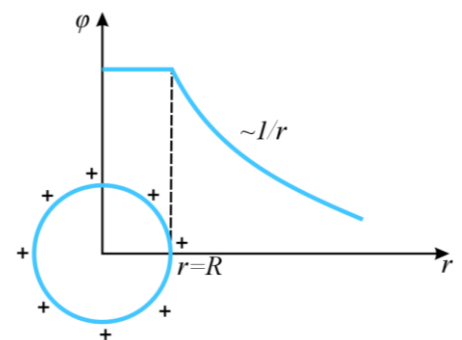
Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (12), задается выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

График зависимости  $\varphi$  от  $r$  приведен на **рис. 3**.



**Рис. 3.** Потенциал сферической поверхности

**4. Поле объемно заряженного шара** радиуса  $R$  с общим зарядом  $q$  вне шара ( $r > R$ ) вычисляется по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad (r \geq R),$$

поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), определяется формулой (13).

В любой точке, лежащей внутри шара на расстоянии  $r'$  от его центра ( $r' < R$ ), напряженность определяется выражением:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r'$$

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r'_1$  и  $r'_2$  от центра шара ( $r'_1 < R$ ,  $r'_2 < R$ ,  $r'_2 > r'_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r_2'^2 - r_1'^2)$$

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра** радиуса  $R$ , заряженного с линейной плотностью  $\tau$ , вне цилиндра ( $r > R$ ) определяется формулой

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$$

Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (14)$$

## 4. ТИПЫ ДИЭЛЕКТРИКОВ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Диэлектриками называются вещества, не способные проводить электрический ток.

Идеальных изоляторов в природе не существует – все вещества хотя бы ничтожно проводят ток, однако диэлектрики делают это в  $10^{15}$ – $10^{20}$  раз хуже, чем вещества называемые проводники

Диэлектрик (как и всякое вещество) состоит из атомов и молекул. Так как положительный заряд всех ядер молекулы равен суммарному заряду электронов, то молекула в целом электрически

I-ая группа диэлектриков	II-ая группа диэлектриков	III-ая группа диэлектриков
<ul style="list-style-type: none"><li>• неполярные молекулы</li><li>• вне поля заряды пространственно не разобщены</li><li>• заряды сдвигаются под действием внешнего поля</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• полярные молекулы</li><li>• вне поля молекулы представляют собой диполи</li><li>• внешнее поле стремится повернуть диполи молекул</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• ионные молекулы</li><li>• решетка с правильным чередованием знаков заряда</li><li>• под действием внешнего поля происходит сдвиг подрешеток</li></ul>
Электронная, или деформационная, поляризация	Ориентационная, или дипольная поляризация	Ионная поляризация

нейтральна. Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом  $+q$ , находящимся в центре «тяжести» положительных зарядов, а заряд всех электронов — суммарным отрицательным зарядом  $-q$ , находящимся в центре «тяжести» отрицательных зарядов, то молекулу можно рассматривать как электрический диполь с электрическим моментом.

Первую группу диэлектриков ( $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент молекулы  $p$  равен нулю.

**Молекулы** таких диэлектриков называются **неполярными**. Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (положительные по полю, отрицательные против поля) и молекула приобретает дипольный момент.

Вторую группу диэлектриков ( $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют асимметричное строение, т. е. центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов не совпадают.

Таким образом, эти молекулы в отсутствие внешнего электрического поля обладают дипольным моментом. **Молекулы** таких диэлектриков называются **полярными**. При отсутствии внешнего поля, однако, дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент равен нулю. Если такой диэлектрик поместить во внешнее поле, то силы этого поля будут стремиться повернуть диполи вдоль поля и возникает отличный от нуля результирующий момент.



Третью группу диэлектриков ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{KCl}$ ,  $\text{KBr}$ , ...) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков.

В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вдвинутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящее к возникновению дипольных моментов.

Таким образом, внесение всех трех групп диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика, или, иными словами, к поляризации диэлектрика.

**Поляризацией** диэлектрика называется процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

Соответственно трем группам диэлектриков различают три вида поляризации:

1. **электронная**, или **деформационная**, **поляризация** диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счет деформации электронных орбит;
2. **ориентационная**, или **дипольная**, **поляризация** диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющих дипольных моментов молекул по полю.

Естественно, что тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля и ниже температура;

3. **ионная поляризация** диэлектриков с ионными кристаллическими решетками, заключающаяся в смещении подрешетки положительных ионов вдоль поля, а отрицательных — против поля, приводящем к возникновению дипольных моментов.

## 5. ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

---

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле он поляризуется, т. е. приобретает отличный от нуля дипольный момент

$$\mathbf{p}_V = \sum_i \mathbf{p}_i$$

где  $\mathbf{p}_i$  — дипольный момент одной молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика пользуются векторной величиной — **поляризованностью**,

**Поляризованность** – дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{V} \quad (15)$$

Из опыта следует, что для большого класса диэлектриков (за исключением сегнетоэлектриков, см. §8) поляризованность  $\mathbf{P}$  линейно зависит от напряженности поля  $\mathbf{E}$ . Если диэлектрик изотропный и  $\mathbf{E}$  не слишком велико, то

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (16)$$

где  $\chi$  — **диэлектрическая восприимчивость вещества**, характеризующая свойства диэлектрика;

$\chi$  – величина безразмерная; притом всегда  $\chi > 0$  и для большинства диэлектриков (твердых и жидких) составляет несколько единиц (хотя, например, для спирта  $\chi \approx 25$ , для воды  $\chi = 80$ ).

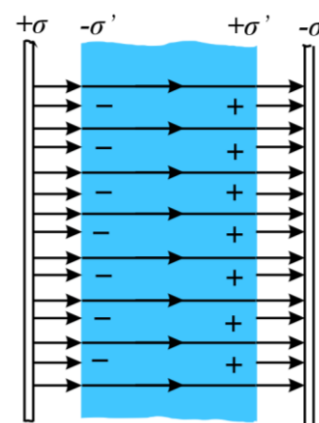
Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное внешнее электрическое поле  $\mathbf{E}_0$  (создается двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями) пластинку из однородного диэлектрика, расположив ее так, как показано на **рис. 4**.

Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов: положительные смещаются по полю, отрицательные — против поля. В результате этого на правой грани диэлектрика, обращенной к отрицательной плоскости, будет избыток положительного заряда с поверхностной плотностью  $+\sigma'$ , на левой — отрицательного заряда с поверхностной плотностью  $-\sigma'$ .

Эти нескомпенсированные заряды, появляющиеся в результате поляризации диэлектрика, называются **связанными**.

Так как их поверхностная плотность  $\sigma'$  меньше плотности  $\sigma$  свободных зарядов плоскостей, то не все поле  $\mathbf{E}$  компенсируется полем зарядов диэлектрика: часть линий напряженности пройдет сквозь диэлектрик, другая же часть — обрывается на связанных зарядах.

#### ◀ Поляризованность



**Рис. 4.** Поле в диэлектрике

Следовательно, поляризация диэлектрика вызывает **уменьшение** в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем.

Вне диэлектрика  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ .

Таким образом, появление связанных зарядов приводит к возникновению дополнительного электрического поля  $\mathbf{E}$  (поля, создаваемого связанными зарядами), которое направлено против внешнего поля  $\mathbf{E}_0$  (поля, создаваемого свободными зарядами) и ослабляет его. Результирующее поле внутри диэлектрика

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'$$

Поле  $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$  (поле, созданное двумя бесконечными заряженными плоскостями, поэтому

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad (17)$$

Определим поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma'$ . По (15), полный дипольный момент пластинки диэлектрика

$$p_V = PV = PSd,$$

где  $S$  — площадь грани пластинки,  
 $d$  — ее толщина.

С другой стороны, полный дипольный момент, равен произведению связанного заряда каждой грани  $Q' = \sigma'S$  на расстояние  $d$  между ними, т. е.  $p_V = \sigma'Sd$ . Таким образом,  $PSd = \sigma'Sd$ , или

$$\sigma' = P, \quad (18)$$

т. е. поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma'$  равна поляризованности  $\mathbf{P}$ . Подставив в (17) выражения (18) и (16), получим

$$E = E_0 - \chi E$$

откуда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{(1 + \chi)} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad (19)$$

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (20)$$

Безразмерная величина (20) называется **диэлектрической проницаемостью среды**.

◀ Диэлектрическая проницаемость

Сравнивая (19) и (20), видим, что  $\varepsilon$  показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком, и характеризует количественно свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле.

## 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СМЕЩЕНИЕ. ТЕОРЕМЕ ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКЕ

Напряженность электростатического поля, согласно (19), зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля  $E$  обратно пропорциональна  $\varepsilon$ . Вектор напряженности  $\mathbf{E}$ , переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчетах электростатических полей. Поэтому оказалось необходимым помимо вектора напряженности характеризовать поле еще **вектором электрического смещения**, который для электрически изотропной среды, по определению, равен

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad (21)$$

Используя формулы (20) и (16), вектор электрического смещения можно выразить как

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (22)$$

Рассмотрим, с чем можно связать вектор электрического смещения. Связанные заряды появляются в диэлектрике при наличии внешнего электростатического поля, создаваемого системой свободных электрических зарядов, т. е. в диэлектрике на электростатическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное поле связанных зарядов. Результирующее поле в диэлектрике описывается вектором напряженности  $\mathbf{E}$ , и потому он зависит от свойств диэлектрика.

Вектором  $\mathbf{D}$  описывается электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами.

Связанные заряды, возникающие в диэлектрике, могут вызвать, однако, перераспределение свободных зарядов, создающих поле.

Поэтому вектор  $\mathbf{D}$  характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т. е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично, как и поле  $\mathbf{E}$ , поле  $\mathbf{D}$  изображается с помощью **линий электрического смещения**, направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности.

Линии вектора  $\mathbf{E}$  могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, в то время как линии вектора

Единица электрического смещения — **кулон на метр в квадрате** (Кл/м<sup>2</sup>).

$$D = \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]$$

◀ **Электрическое смещение**

$\mathbf{D}$  — только на свободных зарядах. Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\mathbf{D}$  проходят не прерываясь.

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS,$$

где  $D_n$  — проекция вектора  $\mathbf{D}$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ .

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:**

Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (23)$$

◀ Теорема Гаусса для поля в диэлектрике

В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Для вакуума  $D_n = \varepsilon_0 E_n$  ( $\varepsilon = 1$ ), тогда поток вектора напряженности  $\mathbf{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n q_i$$

Так как источниками поля  $\mathbf{E}$  в среде являются как свободные, так и связанные заряды, то теорему Гаусса для поля  $\mathbf{E}$  в самом общем виде можно записать как

$$\oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S \varepsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n q_i + \sum_{i=1}^k q_{i\text{свз}},$$

где  $\sum_{i=1}^n q_i$  и  $\sum_{i=1}^k q_{i\text{свз}}$  — соответственно алгебраические суммы свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$ .

Однако эта формула неприемлема для описания поля  $\mathbf{E}$  в диэлектрике, так как она выражает свойства неизвестного поля  $\mathbf{E}$  через связанные заряды, которые, в свою очередь, определяются им же. Это еще раз доказывает целесообразность введения вектора электрического смещения.

## 7. УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕД

Рассмотрим связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков (диэлектрические проницаемости которых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ) при отсутствии на границе свободных зарядов. Построим вблизи границы раздела диэлектриков 1 и 2 небольшой замкнутый прямоугольный контур  $ABCD$  длины  $l$ , ориентируя его так, как показано на **рис. 5**. Согласно теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{E}$ ,

$$\oint_{ABCD} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

откуда

$$E_{\tau 2} l - E_{\tau 1} l = 0$$

(знаки интегралов по  $AB$  и  $CD$  разные, так как пути интегрирования противоположны, а интегралы по участкам  $BC$  и  $DA$  ничтожно малы). Поэтому

$$E_{\tau 2} = E_{\tau 1} \quad (24)$$

Заменив, согласно (21), проекции вектора  $\mathbf{E}$  проекциями вектора  $\mathbf{D}$ , деленными на  $\varepsilon_0 \varepsilon$ , получим

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (25)$$

На границе раздела двух диэлектриков (**рис. 6**) построим прямой цилиндр ничтожно малой высоты, одно основание которого находится в первом диэлектрике, другое — во втором. Основания  $\Delta S$  настолько малы, что в пределах каждого из них вектор  $\mathbf{D}$  одинаков. Согласно теореме Гаусса (23),

$$D_{n2} \Delta S - D_{n1} \Delta S = 0$$

(нормали  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  к основаниям цилиндра направлены противоположно). Поэтому

$$D_{n2} = D_{n1} \quad (26)$$

Заменив, согласно (21), проекции вектора  $\mathbf{D}$  проекциями вектора  $\mathbf{E}$ , умноженными на  $\varepsilon_0 \varepsilon$ , получим

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (27)$$

Таким образом, при переходе через границу раздела двух диэлектрических сред тангенциальная составляющая вектора

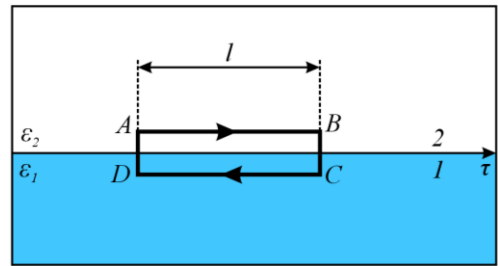


Рис. 5.

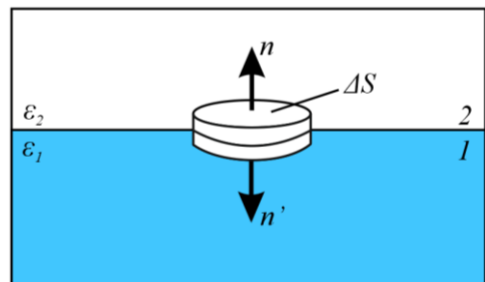


Рис. 6.

$\mathbf{E}$  ( $E_\tau$ ) и нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  ( $D_n$ ) изменяются непрерывно (не претерпевают скачка), а нормальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  ( $E_n$ ) и тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$  ( $D_\tau$ ) претерпевают скачок.

Из условий (24)—(27) для составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  следует, что линии этих векторов испытывают излом (преломляются). Найдем связь между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (на рис. 7  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ).

Согласно (24) и (27),  $E_{\tau 2} = E_{\tau 1}$  и  $\varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1}$ . Разложим векторы  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  у границы раздела на тангенциальные и нормальные составляющие. Из рис. 7 следует, что

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{E_{\tau 2} / E_{n2}}{E_{\tau 1} / E_{n1}}$$

Учитывая записанные выше условия, получим закон преломления линий напряженности  $\mathbf{E}$  (а значит, и линий смещения  $\mathbf{D}$ )

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Эта формула показывает, что, входя в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью, линии  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  удаляются от нормали.

$$\begin{cases} E_{\tau 2} = E_{\tau 1} \\ \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{cases} \quad \begin{cases} D_{\tau 1} = \varepsilon_1 \\ D_{\tau 2} = \varepsilon_2 \\ D_{n2} = D_{n1} \end{cases}$$

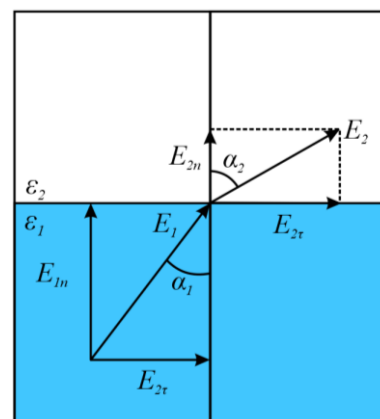


Рис. 7.

◀ **Граничные условия в границе двух диэлектриков**

Вектор напряженности $\mathbf{E}$	Вектор электрического смещения $\mathbf{D}$
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ описывает результирующее поле свободных и связанных зарядов</li> <li>▪ графически изображается с помощью линий напряженности</li> <li>▪ линии напряженности начинаются и заканчиваются на любых зарядах</li> <li>▪ на границе раздела сред <math>E_\tau</math> изменяется непрерывно (не претерпевает скачка), а <math>E_n</math> претерпевает скачок</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ описывает поле свободных зарядов, при таком их распределении, которое имеется при наличии диэлектрика</li> <li>▪ графически изображается с помощью линий электрического смещения</li> <li>▪ линии напряженности начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах</li> <li>▪ на границе раздела сред <math>D_\tau</math> претерпевает скачок, а <math>D_n</math> изменяется непрерывно (не претерпевает скачка)</li> </ul>

## 8. СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКИ

**Сегнетоэлектрики** — диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью, т. е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля.

При отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик представляет собой как бы мозаику из **доменов** — областей с различными направлениями поляризованности. Это схематически показано на примере титаната бария (**рис. 8**), где стрелки и знаки  $\odot$ ,  $\oplus$  указывают направление вектора  $\mathbf{P}$ .

Так как в смежных доменах эти направления различны, то в целом дипольный момент диэлектрика равен нулю. При внесении сегнетоэлектрика во внешнее поле происходит переориентация дипольных моментов доменов по полю, а возникшее при этом суммарное электрическое поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля.

Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, например,  $\epsilon_{\max} \approx 10^4$ ).

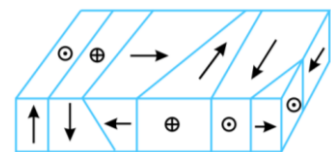
Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его необычные свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется **точкой Кюри**

Как правило, сегнетоэлектрики имеют только одну точку Кюри; исключения составляют лишь сегнетова соль ( $-18$  и  $+24^\circ\text{C}$ ) и изоморфные с ней соединения. В сегнетоэлектриках вблизи точки Кюри наблюдается также резкое возрастание теплоемкости вещества. Превращение сегнетоэлектриков в обычный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, сопровождается фазовым переходом II рода.

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (следовательно, и диэлектрическая восприимчивость  $\chi$ ) сегнетоэлектриков зависит от напряженности  $\mathbf{E}$  поля в веществе, а для других диэлектриков эти величины являются характеристиками вещества.

Для сегнетоэлектриков формула (16) не соблюдается; для них связь между векторами поляризованности ( $\mathbf{P}$ ) и напряженности ( $\mathbf{E}$ ) нелинейная и зависит от значений  $\mathbf{E}$  в предшествующие моменты времени.

К сегнетоэлектрикам относятся, например, детально изученные И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко **сегнетова соль**  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  (от нее и получили свое название сегнетоэлектрики) и титанат бария  $\text{BaTiO}_3$ .



**Рис.8**

В честь французского физика **Пьера Кюри** (1859—1906)



В сегнетоэлектриках наблюдается **явление диэлектрического гистерезиса** («запаздывания»). Как видно из **рис. 9**, с увеличением напряженности  $E$  внешнего электрического поля поляризованность  $P$  растет, достигая насыщения (*кривая 1*). Уменьшение  $P$  с уменьшением  $E$  происходит по *кривой 2*, и при  $E = 0$  сегнетоэлектрик сохраняет **остаточную поляризованность**  $P_0$ , т.е. сегнетоэлектрик остается поляризованным в отсутствие внешнего электрического поля. Чтобы уничтожить остаточную поляризованность, надо приложить электрическое поле обратного направления ( $-E_c$ ). Величина  $E_c$  называется **коэрцитивной силой** (от лат. *coercitio* — удерживание). Если далее  $E$  изменять, то  $P$  изменится по *кривой 3* **петли гистерезиса**.

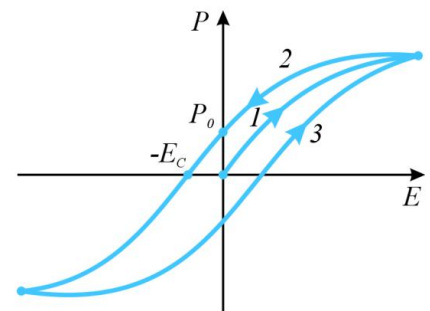
Следует упомянуть еще о пьезоэлектриках — кристаллических веществах, в которых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает электрическая поляризация даже в отсутствие внешнего электрического поля (**прямой пьезоэффект**). Наблюдается и **обратный пьезоэффект** — появление механической деформации под действием электрического поля.

У некоторых пьезоэлектриков решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов, в результате чего они оказываются поляризованными даже без внешнего электрического поля. Такие кристаллы называются **пироэлектриками**.

Еще существуют **электреты** — диэлектрики, длительно сохраняющие поляризованное состояние после снятия внешнего электрического поля (электрические аналоги постоянных магнитов). Эти группы веществ находят широкое применение в технике и бытовых устройствах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2003.
2. Трофимова Т.И. Курс Физики. М.- Академия, 2007.
3. Савельев П.В. Курс физики. Изд. 4, Т. 1, 2, 3. – СПб.: Лань, 2008.



**Рис. 9.** Петля гистерезиса

Интенсивному изучению сегнетоэлектриков послужило открытие академиком Б. М. Вулом (1903—1985) аномальных диэлектрических свойств титаната бария.

Титанат бария из-за его химической устойчивости и высокой механической прочности, а также из-за сохранения сегнетоэлектрических свойств в широком температурном интервале нашел большое научно-техническое применение (например, в качестве генератора и приемника ультразвуковых волн).

В настоящее время известно более сотни сегнетоэлектриков, не считая их твердых растворов. Сегнетоэлектрики широко применяются также в качестве материалов, обладающих большими значениями  $\epsilon$  (например, в конденсаторах).