Лекция № 2.5

Магнитное поле

План

1) Магнитная индукция
2) Закон Био — Савара — Лапласа
3) Закон Ампера
4) Магнитная постоянная
5) Магнитное поле движущегося заряда
6) Действие магнитного поля на движущийся заряд
7) Движение заряженных частиц в магнитном поле
8) Циркуляция вектора магнитной индукции
9) Магнитные поля соленоида и тороида
10) Поток вектора магнитной индукции
11) Теорема Гаусса для магнитного поля
12) Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

Магнитная индукция

Опыт показывает, что, подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое **магнитным**.

Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты.

Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током (это явление впервые обнаружено датским физиком Х.Эрстедом (1777—1851)).

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в этом поле электрические заряды.

Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток.

Подобно тому, как при исследовании электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля используется *замкнутый плоский контур с током (рамка с током),* линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали к контуру. Направление нормали определяется *правилом правого винта:* за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, рукоятка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 1).

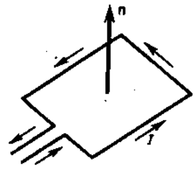

Рис. 1

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. Этот результат используется для выбора направления магнитного поля.

За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рис. 2).

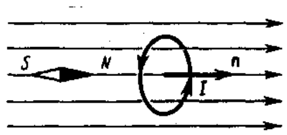

Рис. 2

За направление магнитного поля может быть также принято направление, совпадающее с направлением силы, которая действует на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку.

Так как оба полюса магнитной стрелки лежат в близких точках поля, то силы, действующее на оба полюса, равны друг другу.

Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпадала с направлением поля.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил.

Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки и определяется формулой

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] \qquad (1)$$

где $\vec{p}_m$ — **вектор магнитного момента рамки** с током ($\vec{B}$ —**вектор магнитной индукции,** количественная характеристика магнитного поля).

Для плоского контура с током $\vec{I}$

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} \qquad (2)$$

Где S — площадь поверхности контура (рамки),

$\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Направление $\vec{p}_m$ совпадает, таким образом, с направлением положительной нормали.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение $\vec{M}_{\max} / \vec{p}_m$ ($\vec{M}_{\max}$ — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{\vec{p}_m}$$

Магнитная индукция в данной точке *однородного* магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля.

Однородное магнитное поле – магнитное поле, в каждой точке которого вектор $\vec{B}$ одинаков.

Так как магнитное поле является *силовым*, то его, по аналогии сэлектрическим, изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{B}$.

Их направление задается **правилом правого винта**:

> *Рукоятка винта, ввинчиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции*

Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам.

На рис. 3, *а* показаны линии магнитной индукции поля кругового тока, на рис. 3, *б* — линии магнитной индукции поля соленоида (соленоид — равномерно намотанная на цилиндрическую поверхность проволочная спираль, по которой течет электрический ток).

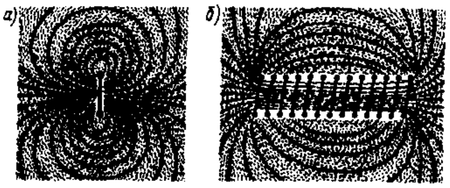

Рис. 3

Линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током.

Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются *разомкнутыми* (начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных).

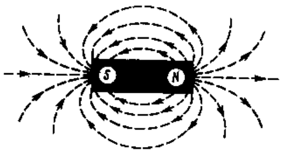

Рис. 4

На рис. 4 изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они выходят из северного полюса и входят в южный.

Вначале казалось, что здесь наблюдается полная аналогия с линиями напряженности электростатического поля и полюсы магнитов играют роль магнитных «зарядов» (магнитных монополей).

Опыты показали, что, разрезая магнит на части, его полюсы разделять нельзя, т. е. в отличие от электрических зарядов свободные магнитные «заряды» не существуют, поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах.

В дальнейшем было установлено, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, аналогичное полю внутри соленоида, и линии магнитной индукции этого магнитного поля являются продолжением линий магнитной индукции вне магнита.

Таким образом, линии магнитной индукции магнитного поля постоянных магнитов являются также замкнутыми.

До сих пор мы рассматривали макроскопические токи, текущие в проводниках. Однако, согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах.

Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле.

Таким образом магнитное поле больше в среде, нежели в вакууме, в отличии от электрического поля.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ характеризует *результирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро-* и *микротоками,* т. е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор $\vec{B}$ в *различных* средах будет иметь *разные* значения.

Магнитное поле *макротоков* описывается **вектором напряженности** $\vec{H}$. Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

где μ_0 — магнитная постоянная,

μ — безразмерная величина — **магнитная проницаемость среды**, показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков $\vec{H}$ усиливается за счет поля микротоков среды.

Сравнивая векторные характеристики электростатического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{B}$ полей, укажем, что аналогом вектора напряженности электростатического поля $\vec{E}$ является вектор магнитной индукции $\vec{B}$, так как векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды.

Закон Био — Савара — Лапласа

Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774—1862) и Ф. Саваром (1791—1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

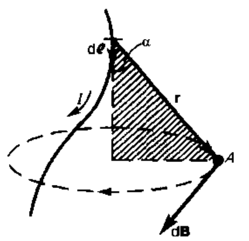

Рис. 5

Закон Био — Савара — Лапласа для проводника с током I, элемент dl которого создает в некоторой точке*А* (рис. 5) индукцию поля $\vec{dB}$, записывается в виде

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I\left[\vec{dl}, \vec{r}\right]}{r^3} \qquad (3)$$

где $\vec{dl}$ — вектор, по модулю равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с током, $\vec{r}$ —радиус-вектор, проведанный из элемента dl проводника в точку*А* поля, r — модуль радиуса-вектора $\vec{r}$.

Направление $\vec{dB}$ перпендикулярно $\vec{dl}$ и $\vec{r}$, т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции.

Это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (**правилу правого винта**):

направление вращения рукоятки винта дает направление $\vec{dB}$, если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе

Модуль вектора $\vec{dB}$ определяется выражением

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2} \qquad (4)$$

где α — угол между векторами $\vec{dl}$ и $\vec{r}$.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции:**

Магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B_i} \qquad (5)$$

Расчет характеристик магнитного поля ($\vec{B}$)по приведенным формулам в общем случае сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет просто рассчитать конкретные поля.

Рассмотрим два примера.

1. Магнитное поле прямого тока — тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 6).

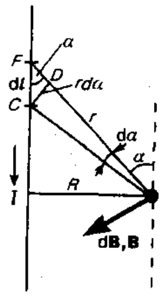

Рис. 6

В произвольной точке*А,* удаленной от оси проводника на расстояние R, векторы $\vec{dB}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа («к вам»). Поэтому сложение векторов $\vec{dB}$ можно заменить сложением их модулей. В качестве постоянной интегрирования выберем угол α (угол между векторами $\vec{dl}$ и $\vec{r}$), выразив через него все остальные величины. Из рис. 165 следует, что

$$r = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha}.$$

(радиус дуги *CD* вследствие малости dl равен r, и угол *FDC* по этой же причине можно считать прямым). Подставив эти выражения в (4), получим, что магнитная индукция, создаваемая одним элементом проводника, равна

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R}\sin\alpha d\alpha \qquad (6)$$

Так как угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от 0 до π, то, согласно (5) и (6),

$$B = \int dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{\pi}\sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R}$$

Следовательно, *магнитная индукция поля прямого тока*

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R} \qquad (7)$$

2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током (рис. 7).

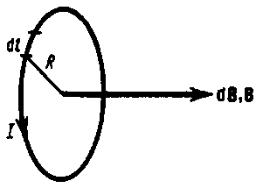

Рис. 7

Как следует из рисунка, все элементы кругового проводника с током создают в центре магнитные поля одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов $\vec{dB}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin\alpha = 1$) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно R, то, согласно (4),

$$dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}dl$$

Тогда

$$B = \int dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int dl = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{R^2}2\pi R = \mu_0\mu\frac{I}{2R}$$

Следовательно, *магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током*

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R}$$

Закон Ампера

Магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие. Следовательно, вращающий момент, испытываемый рамкой, есть результат действия сил на отдельные ее элементы.

Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током. Ампер установил, что сила $\vec{dF}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника d*l* с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$\vec{dF} = I\left[\vec{dl}, \vec{B}\right] \tag{8}$$

где $\vec{dl}$ —вектор, по модулю равный dl и совпадающий по направлению с током, $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции.

Направление вектора $\vec{dF}$ может быть найдено, согласно (8), по общим правилам векторного произведения, откуда следует **правило левой руки:**

> *если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{B}$, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток*

Модуль силы Ампера (см. (8)) вычисляется по формуле

$$dF = IBdl\sin\alpha \tag{9}$$

где α —угол между векторами $\vec{dl}$ и $\vec{B}$.

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов.

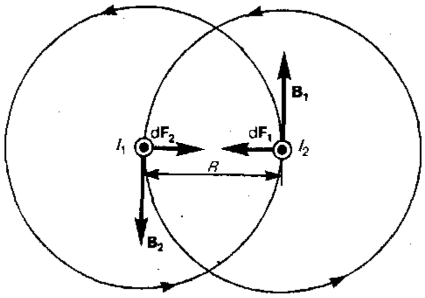

Рис. 8

Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных тока I_1 и I_2; (направления токов указаны на рис. 8), расстояние между которыми равно R.

Каждый из проводников создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током. Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока I_1 на элемент dl второго проводника с током I_2. Ток I_1 создает вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции которого представляют собой концентрические окружности.

Направление вектора $\vec{B_1}$ определяется правилом правого винта, его модуль по формуле (7) равен

$$B_1 = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I_1}{R}$$

Направление силы $\vec{dF_1}$, с которой поле $\vec{B_1}$ действует на участок dl второго тока, определяется по правилу левой руки и указано на рисунке. Модуль силы, согласно (9), с учетом того, что угол α между элементами тока I_2 и вектором $\vec{B_1}$ прямой, равен

$$dF_1 = I_2 B_1 dl$$

подставляя значение для $\vec{B}_1$, получим

$$dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl \qquad (10)$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что сила $d\vec{F}_2$, с которой магнитное поле тока I_2 действует на элемент dl первого проводника с током I_1, направлена в противоположную сторону и по модулю равна

$$dF_2 = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl \qquad (11)$$

Сравнение выражений (10) и (11) показывает, что

$$dF_1 = dF_2$$

т. е. *два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с* силой

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl \qquad (12)$$

Если *токи имеют противоположные направления,* то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует *сила отталкивания,* определяемая формулой (12).

Магнитная постоянная

Если два параллельных проводника с током находятся в вакууме (μ=*1*), то сила взаимодействия на единицу длины проводника, согласно (12), равна

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} \qquad (13)$$

Для нахождения числового значения μ_0 воспользуемся определением ампера, согласно которому $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$ Н/м при $I_1 = I_2 =$ 1 А и R = 1 м. Подставив это значение в формулу (13), получим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Н}{А^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{Гн}{м}$$

где **генри** (Гн) — единица индуктивности.

Закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции *B.*

Предположим, что элемент проводника dl с током I перпендикулярен направлению магнитного поля. Тогда закон Ампера (см. (9)) запишется в виде $dF = IBdl$, откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}$$

Единица магнитной индукции — **тесла** (Тл):

1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А:

$$1\ Тл = 1\ \frac{Н}{А \cdot м}$$

Так как $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \dfrac{H}{A^2}$, а в случае вакуума ($\mu$= 1), $B = \mu_0 H$, то для данного случая

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

Единица напряженности магнитного поля — **ампер на метр** (А/м): 1 А/м — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}\ Тл$.

Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический же ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле.

В результате обобщения опытных данных был установлен закон, определяющий поле $\vec{B}$ точечного заряда q, свободно движущегося с нерелятивистской скоростью $\vec{v}$. *Под свободным движением заряда* понимается его движение с постоянной скоростью.

Этот закон выражается формулой

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{q\left[\vec{v}, \vec{r}\right]}{r^3} \tag{14}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения *M* (рис. 9).

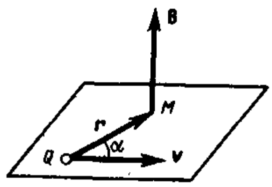

Рис. 9

Согласно выражению (14), вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$, а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{v}$ к $\vec{r}$.

Модуль магнитной индукции (14) вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \sin\alpha \tag{15}$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{r}$.

Сравнивая выражения (3) и (14), видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока:

$$Idl = qv$$

Приведенные закономерности (14) и (15) справедливы лишь при малых скоростях $v << c$ движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени расположен движущийся заряд.

Формула (14) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью $\vec{v}$. Если движется отрицательный заряд, то q надо заменить на $-q$. Скорость $\vec{v}$ — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор $\vec{B}$ в рассматриваемой системе отсчета зависиткак от времени, так и от положения точки *М* наблюдения.

Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физику Г. Роуланду (1848—1901). Окончательно этот факт был установлен профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом (1863—1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком А. Ф. Иоффе, доказавшим эквивалентность, в смысле возбуждения магнитного поля, электронного пучка и тока проводимости.

Действие магнитного поля на движущийся заряд

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле.

Сила, действующая на электрический заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, называется **силой Лоренца** и выражается формулой

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \qquad (16)$$

где $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, в котором заряд движется.

Направление силы Лоренца определяется с помощью **правила левой руки:**

*Если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор $\vec{B}$, а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора $\vec{v}$ (*для $q > 0$ направления $\vec{I}$ и $\vec{v}$ совпадают, для $q < 0$ — противоположны*), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на положительный заряд.*

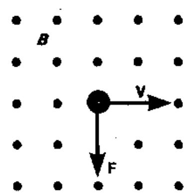

Рис. 10

На рис. 10 показана взаимная ориентация векторов $\vec{v}$, $\vec{B}$ (поле направлено к нам, на рисунке показано точками) и $\vec{F}$ для положительного заряда. На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении. Модуль силы Лоренца (см. (1)) равен

$$F = qvB\sin\alpha$$

где α — угол между $\vec{v}$ и $\vec{B}$

Отметим еще раз, что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд.* В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды.*

Так как по действию силы Лоренца можно найти модуль и направление вектора $\vec{B}$, то выражение для силы Лоренца может быть использовано для определения вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает.

Иными словами, постоянное *магнитное поле не совершает работы* над движущейся в нем заряженной частицей и *кинетическая энергия этой частицы* при *движении в магнитном поле не изменяется*.

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ действует и электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, то результирующая сила $\vec{F}$, приложенная к заряду, равна векторнойсумме сил — силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$$

Это выражение называется **формулой Лоренца**. Скорость $\vec{v}$ в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля.

Движение заряженных частиц в магнитном поле

Выражение для силы Лоренца (16) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле. Направление силы Лоренца и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака заряда *Q* частицы. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитных полях.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно* и на частицы электрические поля не действуют. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$ вдоль линий магнитной индукции, то угол α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$ равен 0 или π. Тогда по формуле (16) сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, то сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right]$ постоянна по модулю и *нормальна к траектории* частицы. Согласно второму закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Отсюда следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус r которой определяется из условия

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

откуда

$$r=\frac{m}{q}\frac{v}{B} \qquad (17)$$

Период вращения частицы, т. е. время T*,* за которое она совершает один полный оборот,

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

Подставив сюда выражение (17), получим

$$T=\frac{2\pi}{B}\frac{m}{q} \qquad (18)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду ($\frac{q}{m}$) частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при $v<<c$*).* На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц.

Если скорость $\vec{v}$ заряженной частицы направлена под углом α к вектору $\vec{B}$ (рис. 9), то ее движение можно представить в виде суперпозиции:

1) *равномерногопрямолинейного движения* вдоль поля со скоростью $v_{\parallel}=v\cos\alpha$;
2) *равномерного движения* со скоростью $v_{\perp}=v\sin\alpha$ *по окружности* в плоскости, перпендикулярной полю.

Радиус окружности определяется формулой (17) (в данном случае надо заменить v на $v_{\perp}=v\sin\alpha$)

$$r=\frac{m}{q}\frac{v\sin\alpha}{B}$$

В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 11).

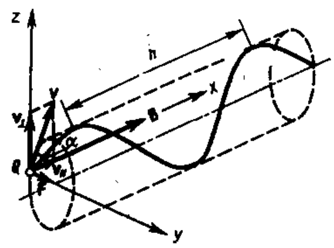

Рис. 11

Шаг винтовой линии

$$h=v_{\parallel}T=vT\cos\alpha$$

Подставив в последнее выражение (18), получим

$$h=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{Bq}$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

Если скорость $\vec{v}$ заряженной частицы составляет угол α с направлением вектора $\vec{B}$ *неоднородного* магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то r и h уменьшаются с ростом B. На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

Циркуляция вектора магнитной индукции

Аналогично циркуляции вектора напряженности электростатического поля введем циркуляцию вектора магнитной индукции.

Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по заданному замкнутому контуру называется интеграл

$$\oint_L \vec{B}\, dl = \oint_L B_l\, dl$$

где dl — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура,

$B_l = B\cos\alpha$ — составляющая вектора $\vec{B}$ в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода),

α — угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{dl}$.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$):

циркуляция вектора $\vec{B}$ по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{B}\, dl = \oint_L B_l\, dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad (19)$$

где n — число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы.

Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого образует с направлением обхода по контуру правовинтовую систему; ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для системы токов, изображенных на рис. 12,

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = I_1 + 2I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4$$

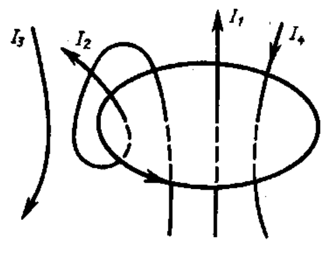

Рис. 12

Выражение (19) справедливо только *для поля в вакууме,* поскольку, как будет показано ниже, для поля в веществе необходимо учитывать молекулярные токи.

Продемонстрируем справедливость теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ на примере магнитного поля прямого тока I, перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 13).

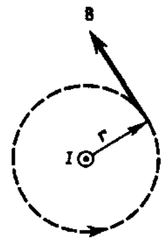

Рис. 13

Представим себе замкнутый контур в виде окружности радиуса r. В каждой точке этого контура вектор $\vec{B}$ одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (она является и линией магнитной индукции). Следовательно, циркуляция вектора $\vec{B}$ равна

$$\oint_L B_l dl = \oint_L B dl = B\oint_L dl = B\cdot 2\pi r$$

Согласно выражению (19), получим $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$ (в вакууме), откуда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Таким образом, исходя из теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ получили выражение для магнитной индукции поля прямого тока, выведенное выше (см. (7)).

Сравнивая выражения для циркуляции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, видим, что между ними существует *принципиальное различие.*

Циркуляция вектора $\vec{E}$ электростатического поля всегда равна нулю, т. е. электростатическое поле является *потенциальным.*

Циркуляция вектора $\vec{B}$ *магнитного поля не равна нулю*. Такое поле называется **вихревым***.*

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике, так как позволяет находить магнитную индукцию поля без применения закона Био — Савара— Лапласа.

Магнитные поля соленоида и тороида

Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри **соленоида.** Рассмотрим соленоид длиной l, имеющий N витков, по которому течет ток (рис. 14).

Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков, т. е. рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида (см. рис. 3, *б)* показывает, что внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

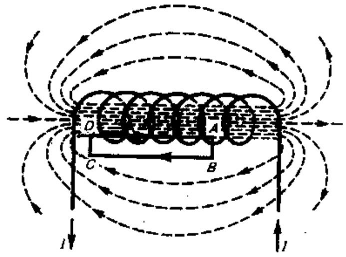

Рис.14

На рис. 14 представлены линии магнитной индукции внутри и вне соленоида.

Чем соленоид длиннее,тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому приближенно можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Для нахождения магнитной индукции $\vec{B}$ выберем замкнутый прямоугольный контур *ABCDA,* как показано на рис. 14. Циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру *ABCDA,* охватывающему все N витков, согласно (19), равна

$$\oint_{ABCDA} B_l dl = \mu_0 NI$$

Интеграл по *ABCDA* можно представить в виде четырех интегралов: по *AB, BC, CD*и *DA.* На участках *AB* и *CD* контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и B_l=0. На участке вне соленоида $B = 0$. На участке *DA* циркуляция вектора $\vec{B}$ равна Bl (контур совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

$$\oint_{DA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI \qquad (20)$$

Из (20) приходим к выражению для *магнитной индукции поля внутри соленоида* (в вакууме):

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \qquad (21)$$

Получили, что поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами в областях, прилегающих к торцам соленоида, при расчетах пренебрегают).

Однако отметим, что вывод этой формулы не совсем корректен (линии магнитной индукции замкнуты, и интеграл по внешнему участку магнитного поля строго нулю не равен). Корректно рассчитать поле внутри соленоида можно, применяя закон Био — Савара — Лапласа; в результате получается та же формула (21).

Важное значение для практики имеет также магнитное поле **тороида** — кольцевой катушки, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 15). Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует.

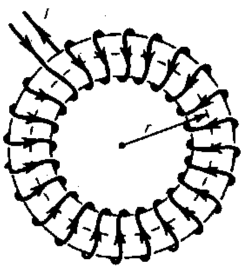

Рис. 15

Линии магнитной индукции в данном случае, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса r.

Тогда, по теореме о циркуляции (19), $B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$, откуда следует, что *магнитная индукция внутри тороида* (в вакууме)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad (22)$$

где N — число витков тороида.

Если контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает и $B \cdot 2\pi r = 0$. Это означает, что поле вне тороида отсутствует (что показывает и опыт).

Поток вектора магнитной индукции

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется *скалярная* физическая величина, равная

$$d\Phi_B = \vec{B}\vec{dS} = B_n dS \qquad (23)$$

где $B_n = B\cos\alpha$ —проекция вектора $\vec{B}$ на направление нормали к площадке dS (α— угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$),

$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$ — вектор, модуль которого равен dS, а направление его совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к площадке.

Поток вектора $\vec{B}$ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos\alpha$ (определяется выбором положительного направления нормали $\vec{n}$).

Поток вектора $\vec{B}$ связывают с контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено,оно связывается с током правилом правого винта. Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, *всегдаположителен*.

Поток вектора магнитной индукции Φ_B через произвольную поверхность S равен

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\vec{dS} = \int_S B_n dS \qquad (24)$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору $\vec{B}$, $B_n = B = const$ и

$$\Phi_B = BS$$

Из этой формулы определяется единица магнитного потока **вебер** (Вб):

1 Вб — магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл (1 Вб=1 Тл·м^2).

Теорема Гаусса для поля $\vec{B}$

поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю

$$\oint_S \vec{B}\vec{dS} = \oint_S B_n dS = 0 \qquad (25)$$

Эта *теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов*, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

Итак, для потоков векторов $\vec{B}$ и $\vec{E}$ сквозь замкнутую поверхность в вихревом и потенциальном полях получаются различные выражения.

В качестве примера рассчитаем поток вектора $\vec{B}$ сквозь соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью μ, согласно (21), равна

$$B = \frac{\mu_0 \mu N I}{l}$$

Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью S равен

$$\Phi_1 = BS$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида и называемый **потокосцеплением**,

$$\Psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S \qquad (26)$$

Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом. Если проводник не закреплен (например, одна из сторон контура изготовлена в виде подвижной перемычки, рис. 16), то под действием силы Ампера он будет в магнитном поле перемещаться. Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

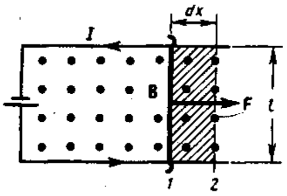

Рис. 16

Для определения этой работы рассмотрим проводник длиной l с током I (он может свободно перемещаться), помещенный в однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура. Сила, направление которой определяется по правилу левой руки, а значение — по закону Ампера (см. (9)), равна

$$F = IBl$$

Под действием этой силы проводник переместится параллельно самому себе на отрезок dx из положения *1* в положение *2.* Работа, совершаемая магнитным полем, равна

$$dA = Fdx = IBldx = IBdS = Id\Phi$$

так как $ldx = dS$ — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле, $BdS = d\Phi$ — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь.

Таким образом,

$$dA = Id\Phi \qquad (27)$$

т. е. *работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.*

Полученная формула справедлива и для произвольного направления вектора $\vec{B}$.

Вычислим работу по перемещению замкнутого контура с постоянным током *I* в магнитном поле.

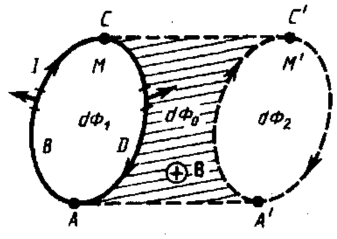

Рис. 17

Предположим, что контур *M* перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение *M'*, изображенное на рис. 17 штриховой линией.

Направление тока в контуре (по часовой стрелке) и магнитного поля (перпендикулярно плоскости чертежа — за чертеж) указано на рисунке. Контур *M* мысленно разобьем на два соединенных своими концами проводника: *ABC* и *CDA.*

Работа dA*,* совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле, равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников *ABC* (dA_1) и *CDA*(dA_2)*,* т. е.

$$dA = dA_1 + dA_2 \qquad (28)$$

Силы, приложенные к участку *CDA* контура, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_2 > 0$. Согласно (27), эта работа равна произведению силы тока I в контуре на пересеченный проводником *CDA*магнитный поток. Проводник *CDA* пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_2$, пронизывающий контур в его конечном положении. Следовательно,

$$dA_2 = I\left(d\Phi_0 + d\Phi_2\right) \qquad (29)$$

Силы, действующие на участок *ABC* контура, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_1 < 0$. Проводник *ABC* пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_1$, пронизывающий контур в начальном положении. Следовательно,

$$dA_1 = -I\left(d\Phi_0 + d\Phi_1\right) \qquad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28), получим выражение для элементарной работы:

$$dA = I\left(d\Phi_2 - d\Phi_1\right)$$

где $d\Phi_2 - d\Phi_1 = d\Phi'$ — *изменение* магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром с током.

Таким образом,

$$dA = Id\Phi' \qquad (31)$$

Проинтегрировав выражение (31), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi \qquad (32)$$

т. е. *работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.*

Формула (32) остается справедливой для контура любой формы в произвольном магнитном поле.