Лекция 2.8
Переменный ток

План:

1. Введение

Переменным током называют электрический ток, который периодически изменяется по модулю и направлению.

Он нашел широкое применение в промышленности и быту. Практически каждое устройство питается с помощью переменного тока.

Основные **преимущества** переменного тока:

- Более удобен для получения и передачи на большие расстояния (меньше потерь);
- Можно легко менять напряжение с помощью трансформатора.

Тем не менее, надо отметить, что большинство электронных приборов используют постоянный ток.

Международное сокращение:
DC – постоянный ток *(direct current)*
AC – переменный ток *(alternating current)*

Как правило, под переменным током имеют в виду **синусоидальный ток**, сила которого меняется по закону синуса (либо косинуса).

2. Квазистационарные токи

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор переменного тока.

Переменный ток можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света.

Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа.

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор, катушку индуктивности и конденсатор, к концам которого приложено переменное напряжение:

Квази- (лат. *quasi*)
первая часть сложных слов то же, что «как будто», «мнимый», «лже-».

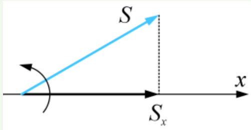
Ток промышленной частоты 50 Гц квазистационарен для цепей длиной до ~100 км.

$$U = U_m \cos(\omega t)\,, \qquad (1)$$

где U_m — амплитуда напряжения.

Векторная диаграмма – графическое изображение величины, меняющейся по закону *синуса* (*косинуса*).

Например:
Величина $S = A\cos(\omega t)$, представляется в виде проекции S_x на ось Ox вектора $\overline{S}$, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω ($A = |\overline{S}|$):



3. Переменный ток, через сопротивление

Схема электрической цепи представлена на **рис. 1**, а. В данном случае можно считать:

- $R \neq 0$
- $L \to 0$
- $C \to 0$

При выполнении условия *квазистационарности* ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R}\cos(\omega t) = I_m \cos(\omega t)\,,$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{R}$ – **амплитуда** (максимальное значение) силы тока;

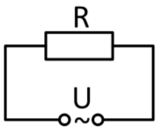
R – **активное (омическое) сопротивление** резистора.

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся **методом векторных диаграмм**.

На **рис. 1**, б дана векторная диаграмма амплитудных значений тока I_m и напряжения U_m на резисторе.

Сдвиг фаз между I_m и U_m равен *нулю*, т.е. I_m и U_m векторы коллинеарны и одинаково направлены.

а)



б)

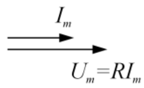


Рис. 1. Цепь с резистором

Коллинерные векторы – векторы, лежащие на параллельных прямых, или на одной прямой.

4. Переменный ток, через индуктивность

Схема электрической цепи представлена на **рис. 2**, а:

- $L \neq 0$
- $R \to 0$
- $C \to 0$

Если в цепи приложено переменное напряжение (1), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет ЭДС самоиндукции:

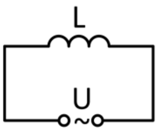
$$\xi_S = -L\frac{dI}{dt}$$

Тогда закон Ома для рассматриваемого участка цепи имеет вид

$$U_m \cos\omega t - L\frac{dI}{dt} = 0\,,$$

$$L\frac{dI}{dt} = U_m \cos\omega t \qquad (2)$$

а)



б)

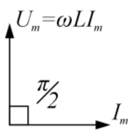


Рис. 2. Цепь с катушкой

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L\frac{dI}{dt} \tag{3}$$

есть падение напряжения на катушке.

Из уравнения (2) следует, что

$$dI = \frac{U_m}{L}(\cos\omega t)\cdot dt$$

После интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю (так как отсутствует постоянная составляющая тока), получим

$$I = \frac{U_m}{\omega L}\sin\omega t = \frac{U_m}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{\omega L}$;

$$R_L = \omega L\,. \tag{5}$$

◀ **Индуктивное сопротивление**

Величина (5) называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным** сопротивлением).

Из выражения (5) вытекает, что для постоянного тока ($\omega \to 0$) катушка индуктивности не имеет сопротивления.

Подстановка значения

$$U_m = \omega L I_m$$

в выражение $L\dfrac{dI}{dt} = U_m\cos\omega t$

с учетом $U_L = L\dfrac{dI}{dt}$

приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m\cos\omega t \tag{6}$$

Сравнивая с выражением

$$I = I_m\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

приходим к выводу, что падение напряжения U_L опережает по фазе ток I, текущий через катушку, на $\dfrac{\pi}{2}$, что и показано на векторной диаграмме (**рис.2**,б).

5. Переменный ток, текущий через емкость

Схема электрической цепи представлена на **рис. 3**, а:

- $C \neq 0$
- $R \to 0$
- $L \to 0$

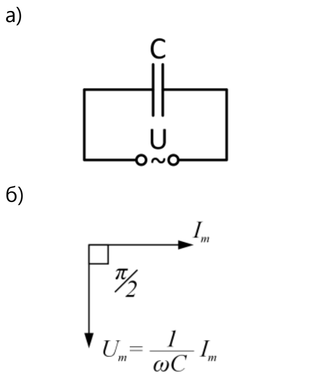


Рис. 3. Цепь с конденсатором.

Если переменное напряжение (1) приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи течет переменный ток.
Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$\frac{q}{C} = U_C = U_m \cos \omega t$$

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (7)$$

◄ **Емкостное сопротивление**

Величина $\qquad R_C = \dfrac{1}{\omega C}$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или **емкостным** сопротивлением).

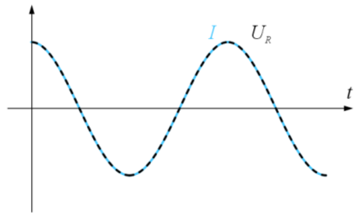
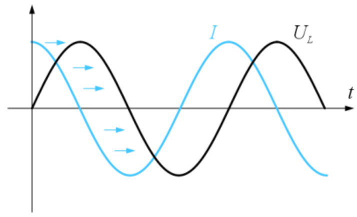
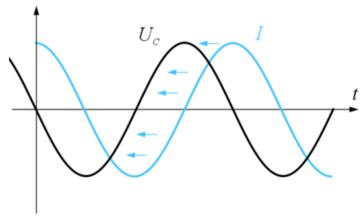
Для постоянного тока ($\omega = 0$) $R_C \to \infty$, т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может.

Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t \qquad (8)$$

Сравнение выражений (7) и (8) приводит к выводу, что напряжение U_C отстает по фазе от текущего через конденсатор тока I на $\dfrac{\pi}{2}$.

Это показано на векторной диаграмме (**рис. 3**, б).

НАПРЯЖЕНИЕ И ТОК В ЭЛЕМЕНТАХ ЦЕПИ		
Резистор сопротивления	Изменяются синфазно (одинаковые по фазе)	
Катушка индуктивности	Напряжение опережает ток на $\dfrac{\pi}{2}$	
Конденсатор	Напряжение отстает от тока на $\dfrac{\pi}{2}$	

6. Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление

Схема электрической цепи представлена на **рис. 4**, а. В данном случае можно считать:

- $R \neq 0$
- $L \neq 0$
- $C \neq 0$

В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения U_R, U_L и U_C.

На **рис. 4**, б представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C).

Амплитуда U_m приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Как видно из **рис. 4**, б, угол φ определяет разность фаз между напряжением и силой тока. Из рисунка следует, что

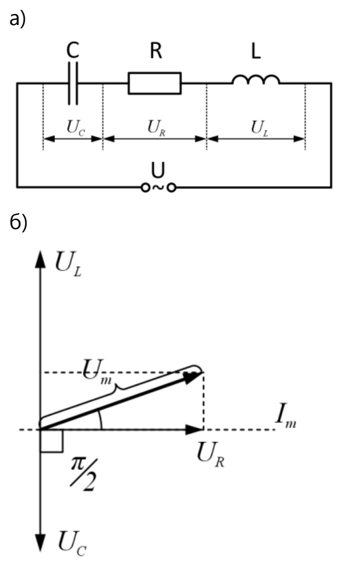


Рис. 4. Цепь с резистором, катушкой и конденсатором

◄ **Разность фаз напряжения и тока в RLC-цепи**

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad (9)$$

Из прямоугольного треугольника получаем

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m\right] = U_m^2$$

откуда амплитуда силы тока имеет значение:

◄ **Амплитуда тока в RLC-цепи**

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (10)$$

Следовательно, если напряжение в цепи изменяется по закону $U = U_m \cos(\omega t)$, то в цепи течет ток:

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \qquad (11)$$

где $tg\,\varphi = \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$ и $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$,

Величина Z называется **полным сопротивлением цепи:**

◄ **Полное сопротивление цепи**

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}, \qquad (12)$$

а величина X – **реактивным сопротивлением**

◄ **Реактивное сопротивление**

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

7. Переменный ток через индуктивность и сопротивление

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. Схема электрической цепи представлена на **рис. 5**, а:

- $C \neq 0$
- $R \neq 0$
- $L = 0$

В данном случае падения напряжений U_R и U_L в сумме равны приложенному напряжению U.

$$U = U_R + U_L$$

Векторная диаграмма для данного случая представлена на **рис. 5**, а, из которого следует, что

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L}{R} \quad \text{и} \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \qquad (13)$$

Выражения (9) и (10) совпадают с (13), если в них $R_C = 0$, т.е. $C = \infty$.

Следовательно, отсутствие конденсатора в цепи означает, что $C = \infty$, а не $C = 0$.

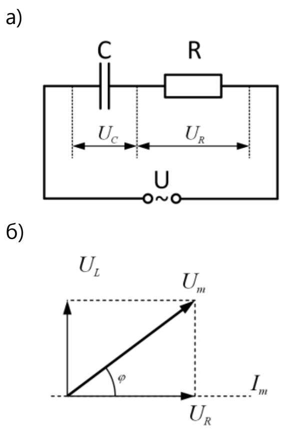


Рис. 5. Цепь с резистором и катушкой

Данный вывод можно трактовать следующим образом: сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения, получим цепь, в которой конденсатор отсутствует (расстояние между обкладками стремится к нулю, а емкость — к бесконечности).

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

8. Резонанс напряжений

Резонанс – явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний, при совпадении частоты внешней вынуждающей силы с собственной частотой колебательной системы

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (см. **рис. 4**, а),

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \qquad (14)$$

то вектор напряжения «ложится» вдоль вектора тока (**рис. 6**).
Другими словами, угол сдвига фаз между током и напряжением (13) обращается в нуль $(\varphi = 0)$. В этом случае говорят, что изменения тока и напряжения происходят *синфазно*.
Условию (14) удовлетворяет частота

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (15)$$

Если учитывать активное сопротивление R контура:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

◄ **Частота резонанса напряжений**

Частота $\omega_{собст} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, называется **собственной частотой** контура.

В данном случае полное сопротивление цепи Z (12) становится минимальным, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном U_m) значения (**рис 6**).

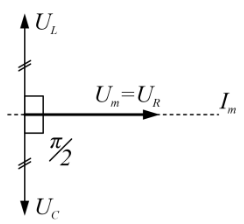


Рис. 6. Резонанс напряжений

При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R = U$), а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе.

Явление резкого увеличения амплитуды силы тока в контуре, при совпадении частоты питающего напряжения с собственной частотой контура, называется **резонансом напряжений (последовательным резонансом),** а частота (15) — **резонансной частотой.**

В случае резонанса напряжений

$$U_{L\,рез} = U_{C\,рез}$$

подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на катушке индуктивности и конденсаторе, получим

$$U_{L\,рез} = U_{C\,рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m,$$

где Q — **добротность** контура, определяемая выражением $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ (обычно $Q > 1$).

Явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты.

Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их **пробой**.

В случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой QU_m. (В данном случае Q — *добротность* контура, которая может быть значительно больше U_m).

Такое усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны.

9. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (**рис. 7**, а).

Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь.

Если приложенное напряжение изменяется по закону $U = U_m \cos\omega t$, то, согласно формуле (11), в ветви $1C2$ течет ток

$$I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1),$$

амплитуда которого определяется из выражения (10) при условии $R = 0$ и $L = 0$:

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C} = U_m \cdot \omega C$$

Начальная фаза φ_1 этого тока по формуле (9) определяется равенством:

$$tg\varphi_1 = -\infty, \qquad \varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi, \tag{16}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Аналогично, сила тока в ветви $1L2$

$$I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$$

амплитуда, которого определяется из (10) при условии $R = 0$ и $C = \infty$ (условие отсутствия емкости в цепи):

$$I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$$

Начальная фаза φ_2 этого тока (9):

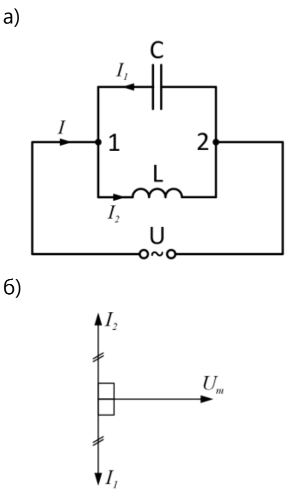


Рис. 7. Резонанс токов

$$tg\varphi_1 = +\infty, \qquad \varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{17}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Из сравнения выражений (16) и (17) вытекает, что разность фаз токов в ветвях *1C2* и *1L2* равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = \left|I_{m1} - I_{m2}\right| = U_m \left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]$$

Если $\omega = \omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$.

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{рез}$ называется **резонансом токов (параллельным резонансом)**.

В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений (15).

Амплитуда силы тока оказалась равна нулю $(I_m = 0)$ потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление R, то разность фаз φ_1—φ_2 будет равна π, поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока I_m будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение.

Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи I_1 и I_2 компенсируются и сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов силы токов I_1 и I_2 могут значительно превышать силу тока I.

Итак, резонанс токов интересен тем, что полной сопротивление цепи оказывается чисто *активным* и имеет *наибольшее* сопротивление (при резонансе напряжений – наименьшее). Другими словами, рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной.

Представим эти выводы в виде таблицы:

<table>
<tr><th colspan="2">Резонанс</th></tr>
<tr><th>напряжений</th><th>токов</th></tr>
<tr><td colspan="2">$Z = R$, т.к. $R_L = R_C$</td></tr>
<tr><td>сопротивление максимальное</td><td>сопротивление минимальное</td></tr>
<tr><td>$Z = R = Z_{\max}$</td><td>$Z = R = Z_{\min}$</td></tr>
</table>

Развиваемая мощность выделяется на активном сопротивлении цепи R.

Свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы.

Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится **вихревыми токами**. В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

Вихревые токи – индукционные токи, возникающие в проводниках при изменении пронизывающего их магнитного потока (явление электромагнитной индукции).
Используются в металлургии в *индукционных печах* – в катушку, питаемую высокочастотным генератором большой мощности, помещают проводящее тело. Вследствие сильного и быстрого изменения магнитного поля в нем возникают вихревые токи, разогревающие его до температуры плавления.

10. Мощность переменного тока

◄ **Мгновенная мощность тока**

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где $U = U_m\cos(\omega t)$,

$$I = I_m\cos(\omega t - \varphi)$$

Раскрыв $\cos(\omega t - \varphi)$, получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi)\cos(\omega t) =$$
$$= I_m U_m\left(\cos^2\omega t\cdot\cos\varphi + \sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot\sin\varphi\right)$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее *среднее значение* за период колебания.

Учитывая, что

$$\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \left\langle\sin\omega t\cdot\cos\omega t\right\rangle = 0$$

получим

◄ **Средняя мощность**

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}I_m U_m\cos\varphi \qquad (18)$$

Из векторной диаграммы (**рис. 6**) следует, что

$$U_m\cos\varphi = RI_m^2$$

поэтому $\langle P\rangle = \dfrac{1}{2}RI_m^2$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

Действующими (или эффективными) значениями тока и напряжения называются соответственно величины:

◄ **Действующие значения тока и напряжения**

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, **выражение средней мощности** (18) можно записать в виде

$$P = IU\cos\varphi, \qquad (19)$$

◄ **Средняя мощность**

где $\cos\varphi$ – называется **коэффициентом мощности**.

Формула (19) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними.

Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то

$\cos\varphi = 1$ и $\quad P = IU$

Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos\varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

Если $\cos\varphi$ имеет значения, существенно меньше единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повысит стоимость линий электропередачи.

Поэтому на практике всегда стремятся увеличить $\cos\varphi$, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

11. Литература

1. *Трофимова Т.И.*
   Курс физики. – М.: Академия, 2010. – 560 с.
2. *Савельев И.В.*
   Курс общей физики. В 5 томах. Том 2. Электричество и магнетизм. – М.: Лань, 2011. – 348 с.
3. *Детлаф А. А., Яворский Б.М.*
   Курс физики. – М.: Академия, 2009. – 720 с.
4. *Сивухин Д.В.*
   Общий курс физики. В 5 томах. Том 3. Электричество. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 656 с.
5. *Ваганова Т.Г.*
   Физика. Практикум по решению задач. Часть I: Механика. Электричество. Магнетизм. – Улан-Удэ: Издательство ВСГТУ, 2009. – 114 с.
6. *Чертов А.Г, Воробьев А.А.*
   Задачник по физике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 640 с.

12. Вопросы для самопроверки

1. Какой ток называют переменным?
2. Для чего переменный ток представляют как квазистационарный ток?
3. В чем заключается метод векторных диаграмм?
4. Как изменяются напряжение и ток в цепи с катушкой индуктивности?
5. Как изменяются напряжение и ток в цепи с конденсатором?
6. Какое сопротивление называют реактивным? От чего оно зависит?
7. В чем заключается резонанс напряжений? Резонанс токов?
8. Чему равна мощность переменного тока?