

Лекция № 3.1 (часть 1) Колебания и волны.

План:

1. Общие представления о колебательных и волновых процессах.
2. Гармонические колебания и их характеристики.
3. Сложение колебаний.
4. Механические гармонические колебания.
5. Примеры гармонических осцилляторов.

1. Общие представления о колебательных и волновых процессах

Колебаниями называются процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Колебательная система – система, совершающая колебания.

Колебательные процессы **широко распространены в природе и технике**, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т.д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания **механические, электромагнитные и др.** Однако различные колебательные процессы описываются **одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями**. Отсюда следует целесообразность единого подхода к изучению колебаний различной физической природы.

В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колебательную систему, различают:

- **Свободные (или собственные) колебания** – колебания, совершаемые за счет первоначально сообщенной энергии при отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.
- **Вынужденные колебания** – колебания, в процессе которых колебательная система подвергается воздействию внешней периодически действующей силы.
- **Автоколебания**, как и вынужденные, сопровождаются действием внешней силы, однако это воздействие управляется самой системой.
- **Параметрические колебания** – колебания, при которых за счет действия внешней силы происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы

2. Гармонические колебания и их характеристики.

Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

- 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто близки к гармоническим;
- 2) различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний (преобразование Фурье).

Гармонические колебания величины s описываются **уравнением типа**

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

где A – **амплитуда колебания** — максимальное значение колеблющейся величины;

ω_0 — **круговая (циклическая) частота**.

$(\omega_0 t + \varphi)$ – **фаза колебания** – периодически изменяющийся аргумент косинуса. Она определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент времени t .

φ – **начальная фаза**. Она определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени ($t = 0$). Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то s может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Период колебания – время одного полного колебания называется – промежуток времени T , за который фаза колебания получает приращение 2π , т. е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = [(\omega_0]t + \varphi) + 2\pi$$

откуда
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{2}$$

Величина, обратная периоду колебаний,
$$\nu = \frac{1}{T} \tag{3}$$

называется **частотой колебаний** – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени. Сравнивая (2) и (3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

Единица частоты — **герц (Гц): 1 Гц** — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса (одно полное колебание).

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s :

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) \tag{5}$$

т.е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой.

Амплитуды величин (4) и (5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$.

Фаза величины (4) отличается от фазы величины (1) на $\pi/2$, а фаза величины (5) отличается от фазы величины (1) на π .

Следовательно, в моменты времени, когда $s = 0$, $\frac{ds}{dt}$ приобретает наибольшие значения; когда s достигает максимального

отрицательного значения, то $\frac{d^2s}{dt^2}$ имеет наибольшее положительное значение (рис. 1; начальная фаза $\varphi = 0$).

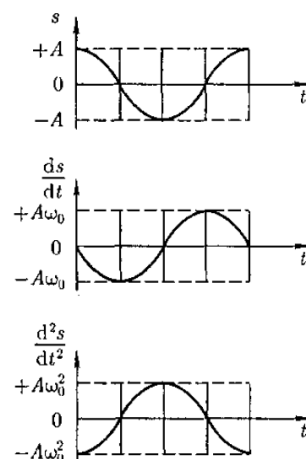


Рис. 1

Из выражения (5) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \tag{6}$$

Решением этого уравнения является выражение (1).

Гармонические колебания изображаются графически методом вращающегося вектора амплитуды, или **методом векторных диаграмм**.

Для этого из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор A , модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 2).

Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0 , равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Таким образом, гармоническое колебание можно представить **проекцией** на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды A , отложенного из произвольной точки оси под углом φ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют комплексным числом.

Согласно **формуле Эйлера**, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Поэтому уравнение гармонического колебания (1) можно записать в

комплексной форме:

$$\tilde{s} = e^{-i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (8)$$

Вещественная часть выражения

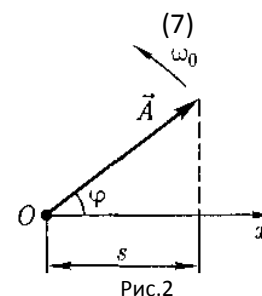
$$\text{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s \quad (8)$$

представляет собой гармоническое колебание.

Обозначение Re вещественной части условимся опускать и (8) будем записывать в виде

$$s = e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина s равна вещественной части комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.



3. Сложение колебаний.

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты.

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить.

Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{cases} s_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ s_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

воспользовавшись **методом векторных диаграмм**. Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис. 3).

Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью

ω_0 , то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной.

Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

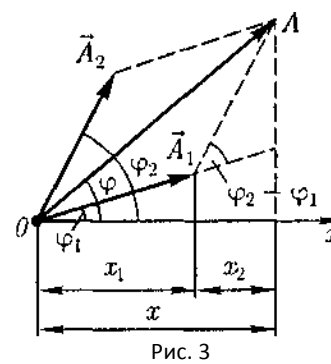
$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9)$$

В выражении (9) амплитуда A и начальная фаза φ соответственно

задаются соотношениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\text{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (10)$$



Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (10) в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$:

1. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = A_1 + A_2$ т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;
2. $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2m - 1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления **мало отличаются по частоте**. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , а частоты равны и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} s_1 = A \cos \omega t, \\ s_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$ найдем

$$s = 2 \left(A \left[\cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right] \cos \right) \omega t \quad (11)$$

Результирующее колебание (11) можно рассматривать как гармоническое с частотой ω , амплитуда A_σ которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_\sigma = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \quad (12)$$

Частота изменения A_σ в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т.е. **частота биений** равна разности частот складываемых колебаний:

$$\omega_\sigma = \Delta\omega$$

Период биений

$$T_\sigma = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Характер зависимости (11) показан на рис. 4, где сплошные линии дают график результирующего колебания (11), а огибающие их штриховые — график медленно меняющейся по уравнению (12) амплитуды.

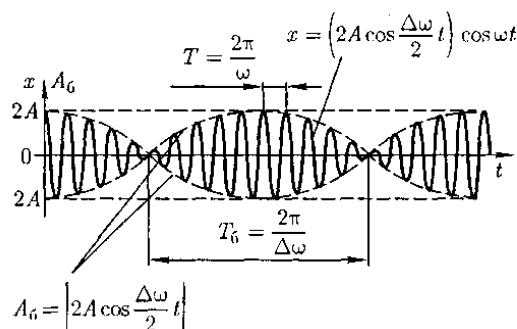


Рис. 4

Определение частоты тона [звука определенной высоты] биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Любые сложные периодические колебания $s = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, различными начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте ω_0 :

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (13)$$

Представление периодической функции в виде (13) связывают с понятием **гармонического анализа сложного периодического колебания, или разложения Фурье**. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ называются первой (или основной), второй, третьей и т. д. **гармониками** сложного периодического колебания.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Для простоты

начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t, \\ y &= B \sin[(\omega t) + \alpha] \end{aligned} \quad (14)$$

где α — разность фаз обоих колебаний; A и B — амплитуды складываемых колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (14) параметра t .

Записывая складываемые колебания в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{A} &= \cos \omega t; \\ \frac{y}{B} &= \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha \end{aligned}$$

и заменяя во втором уравнении $\cos \omega t = \frac{x}{A}$ и $\sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$, получим после несложных преобразований **уравнение эллипса**, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha \quad (15)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α .

Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

$$1) \quad \alpha = 2m \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

В данном случае эллипс вырождается в *отрезок прямой*

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

где знак «+» соответствует нулю и четным значениям m (рис. 5, а), а знак «-» — нечетным значениям m (рис. 5, б).

Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$, совершающимся вдоль прямой [см. (14.5.3)], составляющей с осью x угол

$\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A} \cos m\pi\right)$. В данном случае имеем дело с линейно поляризованными колебаниями.

$$2) \quad \alpha = 2m \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{В данном случае уравнение примет вид } \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (17)$$

Это уравнение *эллипса*, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 208). Кроме того, если $A = B$, то эллипс [см. (16)] вырождается в окружность. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями** или **колебаниями, поляризованными по кругу**.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна.

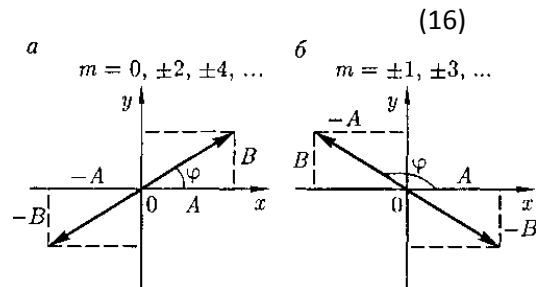


Рис. 5

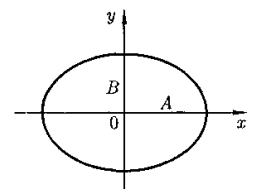


Рис. 208

Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частоты разности фаз складываемых колебаний.

На рис. 5 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху; разность фаз принимается равной α).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу — широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

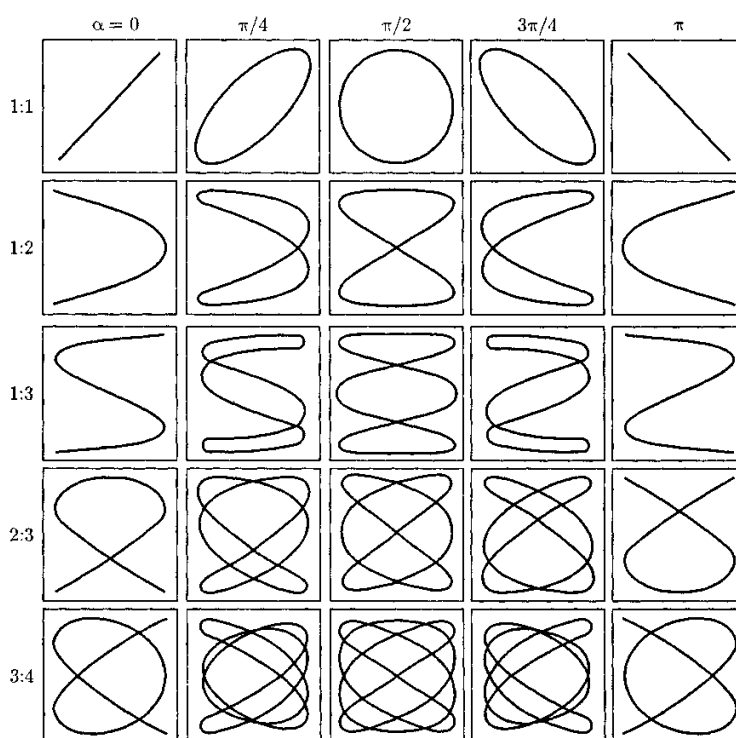


Рис. 5.

4. Механические гармонические колебания.

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат Ox около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением,

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (18)$$

Скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -\omega_0^2 x \quad (19)$$

Сила $F = ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , с учетом (18) и (19) равна

$$F = -m\omega_0^2 x,$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (20)$$

Или
$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \quad (21)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F , равна

$$\Pi = - \int_0^x F(x) dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (141.5)$$

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)] \quad (22)$$

Сложив (21) и (22), получим формулу для **полной энергии**:

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \quad (23)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

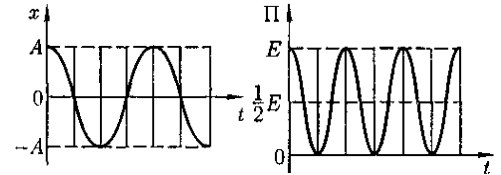
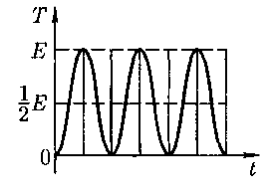


Рис. 6

Из формул (21) и (22) следует, что T и Π изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания. На рис. 6 представлены графики зависимости x , T и Π от времени. Так как $\langle \sin^2 a \rangle = \langle \cos^2 a \rangle = \frac{1}{2}$, то из формул (21), (22) и (23) следует, что

$$\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} E$$

5. Примеры гармонических осцилляторов.

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (24)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур (для токов и напряжений столь малых, что элементы контура можно было бы считать линейными).

1. Пружинный маятник — это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k — жесткость пружины. Уравнение движения маятника в отсутствие сил трения

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Из выражений (24) и (1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (25)$$

и периодом

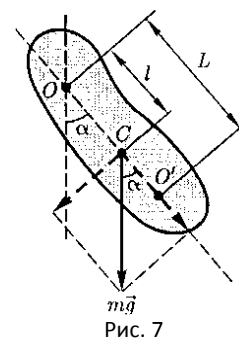
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (26)$$

Формула (25) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т.е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (22) и (25),

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

2. Физический маятник — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела (рис. 7).



Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела в отсутствие сил трения вращающий момент M можно записать в виде

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha \quad (27)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O ;

l — расстояние между ней и центром масс маятника.

Вращающий момент стремится вернуть маятник в положение равновесия, и в этом отношении аналогичен упругой силе. Поэтому так же, как смещение и упругая сила, момент M и угловое смещение α имеют противоположные знаки.

При малых колебаниях маятника (малых отклонениях маятника из положения равновесия) $\sin\alpha \approx \alpha$.

Тогда уравнение (27) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0, \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

Принимая $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$ (28)

получим уравнение идентичное с (24), решение которого [см. (1)] известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (29)$$

Из выражения (29) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 [см. (28)] и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (30)$$

где $L = \frac{J}{ml}$ — **приведенная длина** физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от точки O подвеса маятника на расстоянии приведенной длины L , называется **центром качаний** физического маятника (см. рис. 7). Применяя теорему **Штейнера**, получим

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_0 + ml^2}{ml} = 1 + \frac{J_0}{ml} > 1,$$

т.е. OO' всегда больше OC .

Точка подвеса O маятника и центр качаний O' обладают свойством **взаимозаменяемости**: если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка O подвеса станет новым центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится.

3. Математический маятник — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

Момент инерции математического маятника:

$$J = ml^2, \quad (31)$$

где l — длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как *частный случай физического маятника*, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс, то, подставив

выражение (31) в формулу (30), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (32)$$

Сравнивая формулы (30) и (32), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине l математического маятника, то периоды колебаний этих маятников одинаковы. Следовательно, **приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

4. Колебательный контур.

Среди различных физических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются, и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** — цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R .

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в *идеализированном* контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \ll 0$).

Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm Q$. Тогда в начальный момент времени $t = 0$ (рис. 8, а) между обкладками

конденсатора возникнет электрическое поле, энергия которого $W_{эл} = \frac{Q^2}{2C}$.

Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток I . В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а

энергия магнитного поля катушки ($W_{маг} = \frac{LQ^2}{2}$) — возрастать.

Так как $R \ll 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия:

$$W = W_{эл} + W_{маг} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LQ^2}{2} = const,$$

так как она на нагревание не расходуется.

Поэтому в момент $t = \frac{T}{2}$, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения (рис. 8, б).

С этого момента ток в контуре будет убывать, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней будет индуцироваться ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора.

Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который, в конце концов, обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 8, в).

Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 8, г) и система к моменту времени $t = T$ придет в первоначальное состояние (см. рис. 8, а). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора.

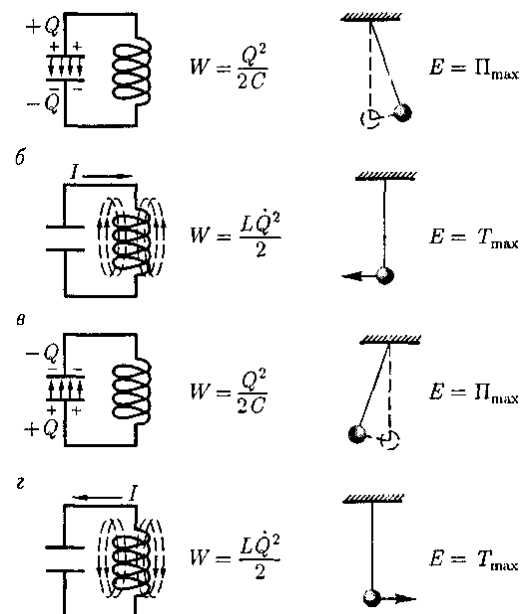


Рис. 8

Если бы потеря энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т. е. периодически изменялись (колебались) бы заряд Q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I , текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электромагнитные колебания, причем колебания сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электромагнитные колебания в колебательном контуре **можно сопоставить с механическими колебаниями** маятника (рис. 8), сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В данном случае энергия электрического поля

конденсатора $\frac{Q^2}{2C}$ аналогична потенциальной энергии маятника, энергия магнитного поля

катушки $\frac{LQ^2}{2}$ — кинетической энергии, сила тока в контуре — скорости движения маятника. Индуктивность L играет роль массы m , а сопротивление контура R — роль силы трения $F_{тр}$, действующей на маятник.

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью L , конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R , где IR — напряжение на резисторе; $U_C = \frac{Q}{C}$ —

напряжение на конденсаторе; $\mathcal{E}_s = -L \frac{dQ}{dt}$ — ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока (\mathcal{E}_s — единственная ЭДС в контуре).

Следовательно,

$$L \frac{dQ}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad (33)$$

Разделив (143.1) на L и подставив $I = \dot{Q}$ и $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$, получим дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0 \quad (34)$$

В данном колебательном контуре внешние ЭДС отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой свободные колебания. Если сопротивление $R = 0$, то свободные электромагнитные колебания в контуре являются *гармоническими*. Тогда из (34) получим **дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний** заряда в контуре:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Из выражений (29) и (1) вытекает, что заряд Q совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (35)$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0 , называемой **собственной частотой контура**, т. е.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (36)$$

$$\text{и периодом } T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (37)$$

Формула (37) впервые была получена У. Томсоном и называется **формулой Томсона**.

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (38)$$

где $I_m = \omega_0 Q_m$ — амплитуда силы тока.

Напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (39)$$

где $U_m = \frac{Q_m}{C}$ — амплитуда напряжения.

Из выражений (38) и (39) вытекает, что колебания тока I опережают по фазе колебания заряда Q на $\frac{\pi}{2}$, т.е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение) обращается в нуль, и наоборот.

Справочные данные:

Жан Батист Жозеф Фурье (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier; 21 марта 1768, Осер, Франция — 16 мая 1830, Париж), французский математик и физик.

Научные достижения;

- Доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, лежащих между данными пределами (Теорема Фурье 1796).
- Исследовал, независимо от Ж. Мурайле, вопрос об условиях применимости разработанного Исааком Ньютоном метода численного решения уравнений (1818).
- Монографии «Аналитическая теория тепла», в которой был дан вывод уравнения теплопроводности в твёрдом теле, и разработка методов его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье.
- Нашёл формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.
- Доказал, что всякую произвольно начерченную линию, составленную из отрезков дуг разных кривых, можно представить единым аналитическим выражением.
- В 1823 независимо от Эрстеда открыл термоэлектрический эффект, показал, что он обладает свойством суперпозиции, создал термоэлектрический элемент.

Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Преобразование Фурье — операция, сопоставляющая функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие — гармонические колебания с разными частотами.

Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным

преобразованием и задается следующей формулой:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

Ж. Лиссажу (1822-1880) – французский физик.