

## Затухающие и вынужденные колебания. Электромагнитные волны

### План

1. Свободные затухающие колебания
2. Вынужденные колебания
3. Резонанс
4. Переменный ток
5. Мощность переменного тока
6. Электромагнитные волны
7. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны
8. Энергия электромагнитных волн

### 1. Свободные затухающие колебания

Рассмотрим **свободные затухающие колебания** — колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются.

Простейшим **механизмом уменьшения энергии колебаний** является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука), колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни оттока в контуре, ни от напряжения.

Различные по своей природе линейные системы **описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями**, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения, а также проводить их моделирование.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (1)$$

где  $s$  — **колеблющаяся величина**, описывающая тот или иной физический процесс;

$\delta = \text{const}$  — **коэффициент затухания**,

$\omega_0$  — **собственная частота** колебательной системы — циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, т.е. при  $\delta = 0$  (при отсутствии потерь энергии).

Решение уравнения (1) рассмотрим в виде

$$s = e^{-\delta t} u, \quad (2)$$

где  $u = u(t)$

После нахождения первой и второй производных выражения (2) и подстановки их в дифференциальное уравнение (1) получим

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 + \delta^2)u = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (3) зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (4)$$

[если  $(\omega_0^2 - \delta^2) > 0$ , то такое обозначение мы вправе сделать].

Тогда получим уравнение типа (1)  $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$ , решением которого является функция  $u = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

Таким образом, решение уравнения (1) в случае малых затуханий ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ )

$$u = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (5)$$

где  $A = A_0 e^{-\delta t}$  — амплитуда затухающих колебаний (6)

$A_0$  — начальная амплитуда.

Зависимость (5) показана на рис. 1 сплошной линией, а зависимость (6) — штриховыми линиями.

$\tau = \frac{1}{\delta}$  — время релаксации — промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты.

Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (см. рис. 1).

Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (4) равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Если  $A(t)$  и  $A(t + T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T} \quad \text{называется декрементом затухания,}$$

а его логарифм

$$\vartheta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad \text{— логарифмический декремент затухания} \quad (7)$$

$N_e$  — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

Логарифмический декремент затухания — постоянная величина для данной колебательной системы.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности**  $Q$ , которая при малых значениях логарифмического декремента [так как затухание мало ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $T$  принято равным  $T_0$ ].

$$Q = \frac{\pi}{\vartheta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что **добротность** пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за время релаксации.

Выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, применимы для колебаний различной физической природы.

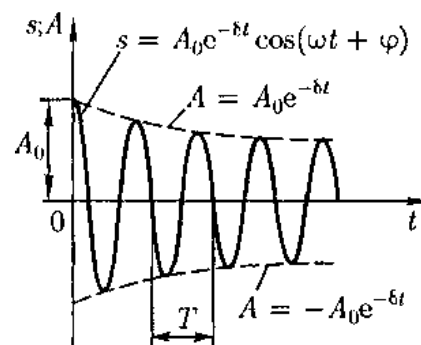


Рис. 1

### 1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника.

Для пружинного маятника массой  $T$ , совершающего малые колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ , сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{тр} = -ru = -r\dot{x}$$

Где  $r$  — коэффициент сопротивления;

знак «-» указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad (9)$$

Используя формулу  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и принимая, что коэффициент затухания

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad (10)$$

получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Из выражений (146.1) и (146.5) вытекает, что колебания маятника подчиняются закону

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где частота  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$

Добротность пружинного маятника, согласно (8) и (10),  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{km}}{r}$ .

### 2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при  $R \neq 0$ ) имеет вид

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Учитывая выражения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{R}{2L} \quad (11)$$

дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

Из выражений (1) и (5) вытекает, что колебания заряда совершаются по закону

$$Q = Q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (12)$$

с частотой, согласно(4),

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (13)$$

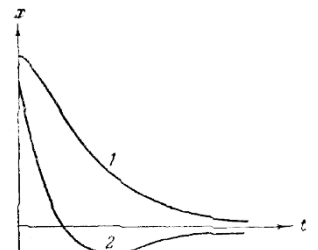
меньшей собственной частоты контура  $\omega_0$ .

При  $R = 0$  формула (13) переходит в (4).

Логарифмический декремент затухания определяется формулой (7), а добротность колебательного контура

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14)$$

В заключение отметим, что при увеличении коэффициента затухания  $\delta$  период затухающих колебаний растет и при  $\delta = \omega_0$  обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим. В этом случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда  $t \rightarrow \infty$ . Данный процесс будет **апериодическим**, т.е. не колебательным.



Огромный интерес для техники предоставляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания принципиально отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без последующих внешних воздействий, а также от вынужденных колебаний, происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза.

Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах так же возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей.

Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповые генераторы и т.д.

#### Сопоставление затухающих колебаний пружинного маятника и колебаний в электрическом колебательном контуре.

Колебания			
механические		электромагнитные	
Дифференциальное уравнение	$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение	$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$ $\ddot{Q} + 2\delta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$
Масса	$m$	Индуктивность катушки	$L$
Коэффициент сопротивления	$r$	Сопротивление	$R$
Коэффициент жесткости	$k$	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x$	Заряд	$Q$
Скорость	$v$	Сила тока	$I$
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора	$\frac{Q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля катушки	$\frac{LI^2}{2}$
Собственная частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собственная частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Коэффициент затухания	$\delta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\delta = \frac{R}{2L}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{km}}{r}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

## 2. Вынужденные колебания.

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии.

Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора  $X(t)$ , изменяющегося по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

Если рассматривать механические колебания, то роль  $X(t)$  играет внешняя вынуждающая сила  $F = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$  (16)

С учетом (16) закон движения для пружинного маятника (9) запишется в виде

$$m\ddot{s} = -ks - r\dot{s} + F_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Используя  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и (10), приходим к уравнению

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \varphi) \quad (17)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль  $X(t)$  играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону ЭДС или переменное напряжение

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Тогда уравнение (15) с учетом (18) можно записать в виде

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{Q}{LC} = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t + \varphi)$$

Используя (11), приходим к уравнению

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

**Вынужденные механические и электромагнитные колебания** – колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся ЭДС.

Уравнения (17) и (19) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (20)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы.

В случае механических колебаний

$$X_0 = \frac{F_0}{m},$$

в случае электромагнитных колебаний

$$X_0 = \frac{U_0}{L}.$$

Решение уравнения (20) равно сумме общего решения (5) однородного уравнения (1) и частного решения неоднородного уравнения.

Частное решение найдем в комплексной форме. Заменим правую часть уравнения (20) на комплексную величину:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 e^{-i\omega t} \quad (21)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$s = s_0 e^{-i\omega t}$$

Подставляя выражение для  $s$  и его производных ( $\dot{s} = i\omega s_0 e^{-i\omega t}$ ,  $\ddot{s} = -\omega^2 s_0 e^{-i\omega t}$ ) в уравнение (21), получим

$$s_0 e^{-i\eta t} (-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_0^2) = x_0 e^{-i\omega t} \quad (22)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время  $t$  из него должно исключаться.

Отсюда следует, что  $\eta = \omega$ .

Учитывая это, из уравнения (22) найдем величину  $s_0$  и умножим ее числитель и знаменатель на  $\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\delta\omega$ :

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} = x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме:

$$s_0 = A e^{-i\varphi},$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (23)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (24)$$

Следовательно, решение уравнения (21) в комплексной форме примет вид

$$s = A e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (20), равна

$$s = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (25)$$

где  $A$  и  $\varphi$  задаются соответственно формулами (23) и (24).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (20) имеет вид

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (26)$$

Решение уравнения (20) равно сумме общего решения однородного уравнения

$$s_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (27)$$

и частного решения (26).

Слагаемое (27) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (23).

Графически вынужденные колебания представлены на рис. 2. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой  $\omega$  и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (23) и (24), также зависят от  $\omega$ .

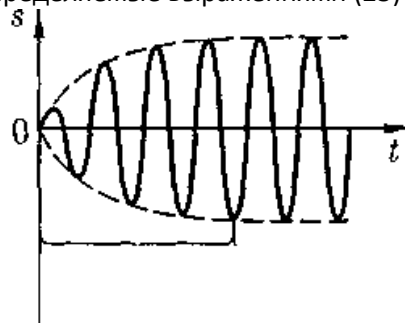


Рис.2. Установление колебаний

Запишем формулы (25), (23) и (24) для электромагнитных колебаний,

учитывая, что  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  и  $\delta = \frac{R}{2L}$ :

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{tg} \alpha = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L} \quad (28)$$

Дифференцируя  $Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$  по  $t$ , найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях:

$$I = \dot{Q} = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (29)$$

где

$$I_m = Q_m \omega_0 = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (30)$$

Выражение (147.14) может быть записано в виде

$$I = I_m \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Где  $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$  — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением.

В соответствии с выражением (28)

$$\text{tg} \varphi = \text{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\text{tg} \alpha} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (31)$$

Из формулы (31) вытекает, что

ток отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ), если  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ,

и опережает напряжение ( $\varphi < 0$ ), если  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$

Формулы (30) и (31) можно также получить с помощью векторной диаграммы.

### 3. Резонанс.

Рассмотрим зависимость амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$ .

**Резонанс** – явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы.

Механические и электромагнитные колебания будем рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением ( $x$ ) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом ( $Q$ ) конденсатора.

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

Из формулы (23)

следует, что амплитуда  $A$  смещения (заряда) имеет максимум.

Чтобы определить **резонансную частоту**  $\omega_{\text{рез}}$  — частоту, при которой амплитуда  $A$  смещения (заряда) достигает максимума, — нужно найти максимум функции (23), или, минимум подкоренного выражения.

Продифференцировав подкоренное выражение по  $\omega$  и приравняв его нулю, получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2 \omega = 0$$

Это равенство выполняется при  $\omega = 0, \pm\sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2}$ , у которых только лишь положительное значение имеет физический смысл.

Следовательно, резонансная частота  $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  (32)

При  $\delta^2 \ll \omega_0^2$  значение  $\omega_{рез}$  практически совпадает с собственной частотой  $\omega_0$  колебательной системы. Подставляя (32) в формулу (23), получим

$$A_{рез} = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (33)$$

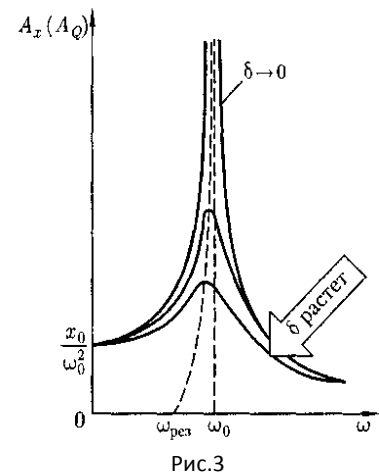
На рис. 3 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях  $\delta$ .

Из (32) и (33) вытекает, что чем меньше  $\delta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой.

Если  $\omega \rightarrow 0$ , то все кривые достигают одного и того же, отличного от нуля, предельного значения  $x_0/\omega_0^2$ , которое называют **статическим отклонением**.

В случае механических колебаний  $\frac{x_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

в случае электромагнитных  $\frac{x_0}{\omega_0^2} = \frac{U_m}{L\omega_0^2}$



Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то все кривые асимптотически стремятся к нулю.

Приведенная совокупность кривых называется **резонансными кривыми**.

Из формулы (33) вытекает, что при малом затухании ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансная амплитуда смещения (заряда)

$$A_{рез} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0 x_0}{2\delta\omega_0^2} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2}$$

где  $Q$  — добротность колебательной системы [см. (146.8)];

$x_0/\omega_0^2$  — статическое отклонение.

Отсюда следует, что добротность  $Q$  характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше  $Q$ , тем больше  $A_{рез}$ .

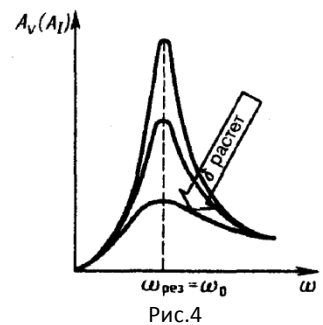
На рис. 4 представлены резонансные кривые для амплитуды скорости (тока). Амплитуда скорости (тока)

$$\omega A = \frac{x_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\delta^2}}$$

максимальна при  $\omega_{рез} = \omega_0$  и равна

$$\omega A = \frac{x_0}{2\delta},$$

т.е. чем больше коэффициент затухания  $\delta$ , тем ниже максимум резонансной кривой.





Используя формулы  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , (10) и (11), получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \quad \delta = \frac{r}{2m} \quad (A_v)_{\max} = \frac{x_0}{2\delta} = \frac{F_0}{r}$$

а амплитуда тока при электрическом резонансе

$$x_0 = \frac{U_m}{L} \quad \delta = \frac{R}{2L} \quad (A_I)_{\max} = \frac{x_0}{2\delta} = \frac{U_m}{R}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Из выражения следует, что если затухание в системе отсутствует ( $\delta = 0$ ), то только в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях  $\varphi \neq 0$ .

Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при разных коэффициентах  $\delta$  графически представлена на рис. 5, из которого следует, что при изменении  $\omega$  изменяется и сдвиг фаз  $\varphi$ .

Из формулы (24) вытекает, что

$$\text{при } \omega = 0 \quad \varphi = 0,$$

а при  $\omega = \omega_0$  не зависимо от значения коэффициента затухания  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , т.е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на  $\frac{\pi}{2}$ .

При дальнейшем увеличении  $\omega$  сдвиг фаз возрастает и при

$$\omega \gg \omega_0 \quad \varphi \rightarrow \pi,$$

т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения).

Семейство кривых, изображенных на рис. 5, называется **фазовыми резонансными кривыми**.

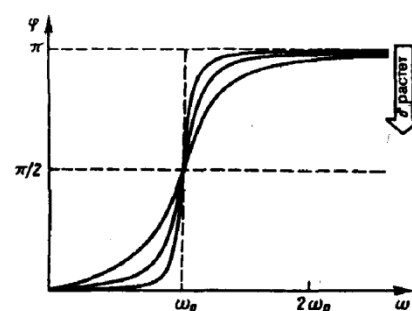


Рис.5

Явления резонанса могут быть как **вредными**, так и **полезными**. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота их колебаний не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения.

С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

#### 4. Переменный ток.

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор переменного тока. Переменный ток можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света.

Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, которые будут использованы применительно к переменным токам (эти законы уже использовались при рассмотрении электромагнитных колебаний).

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор, катушку индуктивности и конденсатор, к концам которого приложено переменное напряжение

$$U = U_m \cos(\omega t) \quad (34)$$

где  $U_m$  — амплитуда напряжения.

**1. Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением  $R$  ( $L \rightarrow 0, C \rightarrow 0$ ) (рис. 6, а).**

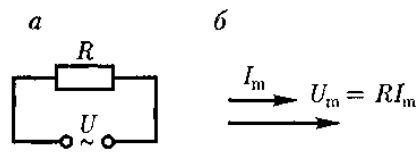


Рис.6

При выполнении условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t) = I_m \cos(\omega t)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

где амплитуда силы тока

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся методом векторных диаграмм. На рис. 6,б дана векторная диаграмма амплитудных значений тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  на резисторе (сдвиг фаз между  $I_m$  и  $U_m$  равен нулю).

**2. Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью  $L$  ( $R \rightarrow 0, C \rightarrow 0$ ) (рис. 7, а).**

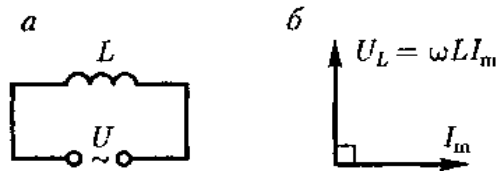


Рис.7

Если в цепи приложено переменное напряжение (34), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$$

Тогда закон Ома для рассматриваемого участка цепи имеет вид

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

откуда

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t \tag{35}$$

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \tag{36}$$

есть падение напряжения на катушке.

Из уравнения (35) следует, что

$$dI = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

После интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю (так как отсутствует постоянная составляющая тока), получим

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \tag{37}$$

Где  $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$

Величина

$$R_L = \omega L \tag{38}$$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или индуктивным сопротивлением).

Из выражения (38) вытекает, что для постоянного тока ( $\omega \rightarrow 0$ ) катушка индуктивности не имеет сопротивления. Подстановка значения

$$U_m = \omega L I_m$$

в выражение  $L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t$  с учетом  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t \quad (37)$$

Сравнение с выражением  $I = I_m \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$  приводит к выводу, что падение напряжения  $U_L$  опережает по фазе ток  $I$ , текущий через катушку, на  $\frac{\pi}{2}$ , что и показано на векторной диаграмме (рис.7,б).

### 3. Переменный ток, текущий через конденсатор емкостью $C$ ( $R \rightarrow 0, L \rightarrow 0$ ) (рис. 8, а).

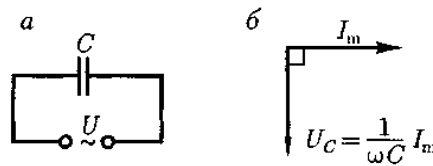


Рис. 8

Если переменное напряжение (34) приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи течет переменный ток.

Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$\frac{Q}{C} = U_C = U_m \cos \omega t$$

Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (38)$$

Величина

$$R_C = \frac{1}{\omega C}$$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или емкостным сопротивлением).

Для постоянного тока ( $\omega = 0$ )  $R_C = \infty$ , т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может.

Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t \quad (39)$$

Сравнение выражений (38) и (39) приводит к выводу, что падение напряжения  $U_C$  отстает по фазе от текущего через конденсатор тока  $I$  на  $\frac{\pi}{2}$ .

Это показано на векторной диаграмме (рис. 8,б).

### 4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор.

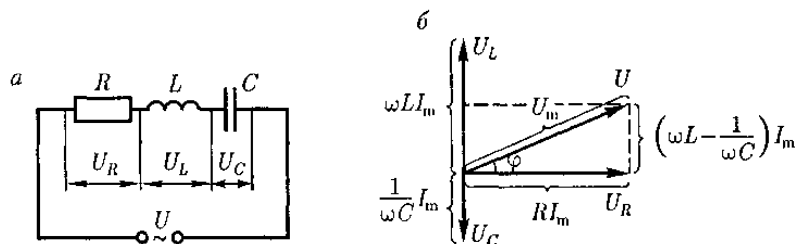


Рис. 9

На рис. 9,а представлен участок цепи, содержащий резистор сопротивлением  $R$ , катушку индуктивностью  $L$  и конденсатор емкостью  $C$ , к концам которого приложено переменное напряжение (149.1). В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$ .

На рис. 9,б представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе ( $U_R$ ), катушке ( $U_L$ ) и конденсаторе ( $U_C$ ).

Амплитуда  $U_m$  приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

Как видно из рис. 9, б, угол  $\varphi$  определяет разность фаз между напряжением и силой тока. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (40)$$

Из прямоугольного треугольника получаем

$$(RI_m)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2$$

откуда амплитуда силы тока имеет значение

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (41)$$

совпадающее с (30).

Следовательно, если напряжение в цепи изменяется по закону  $U = U_m \cos(\omega t)$ , то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (42)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{и} \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

определяются соответственно формулами (40) и (41).

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (43)$$

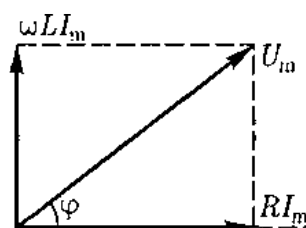
называется **полным сопротивлением цепи**,

а величина  $X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$  — **реактивным сопротивлением**.

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. В данном случае падения напряжений  $U_R$  и  $U_L$  в сумме равны приложенному напряжению  $U$ .

Векторная диаграмма для данного случая представлена на рис. 10, из которого следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}; \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (44)$$



Выражения (40) и (41) совпадают с (44), если в них  $R_C = 0$ , т.е.  $C = \infty$ . Следовательно, отсутствие конденсатора в цепи означает, что  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ .

Данный вывод можно трактовать следующим образом: сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения, получим цепь, в которой конденсатор отсутствует [расстояние между обкладками стремится к нулю, а емкость — к бесконечности].

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$$

## 5. Мощность переменного тока.

**Мгновенное значение мощности переменного тока** равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

Где  $U = U_m \cos \omega t$ ,  $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ ,

Раскрыв  $\cos(\omega t - \varphi)$ , получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

Получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi \tag{45}$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 218) следует, что

$$U_m \cos \varphi = R I_m^2$$

Поэтому  $\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2$

Такую же мощность развивает постоянный ток  $I = I_m / \sqrt{2}$

**Действующими** (или **эффективными**) значениями тока и напряжения называются соответственно величины:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (45) можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi \tag{46}$$

где  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

Формула (46) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними.

Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то

$$\cos \varphi = 1 \quad \text{и} \quad P = UI.$$

Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

Если  $\cos\varphi$  имеет значения, существенно меньше единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повысит стоимость линий электропередачи.

Поэтому на практике всегда стремятся увеличить  $\cos\varphi$ , наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.

## 6. Электромагнитные волны.

Существование **электромагнитных волн** — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью, — вытекает из уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла сформулированы в 1865 г. на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений.

Как уже указывалось, решающую роль для утверждения максвелловской теории сыграли опыты Герца (1888), доказавшие, что электрические и магнитные поля действительно распространяются в виде воли, поведение которых полностью описывается уравнениями Максвелла.

Источником электромагнитных волн в действительности может быть любой электрический колебательный контур или проводник, по которому течет переменный электрический ток, так как для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения) или соответственно переменное магнитное поле. Однако излучающая способность источника определяется его формой, размерами и частотой колебаний. Чтобы излучение играло заметную роль, необходимо увеличить объем пространства, в котором переменное электромагнитное поле создается. Поэтому для получения электромагнитных волн непригодны закрытые колебательные контуры, так как в них электрическое поле сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное — внутри катушки индуктивности.

Герц в своих опытах, уменьшая число витков катушки и площадь пластин конденсатора, а также раздвигая их (рис. 11, а, б), совершил переход от закрытого колебательного контура к **открытому колебательному контуру (вibratorу Герца)**, представляющему собой два стрежня, разделенных искровым промежутком (рис. 11, в).

Если в закрытом колебательном контуре переменное электрическое поле сосредоточено внутри конденсатора (рис. 11, а), то в открытом оно заполняет окружающее контур пространство (рис. 11, в), что существенно повышает интенсивность электромагнитного излучения.

Колебания в такой системе поддерживаются за счет источника э.д.с., подключенного к обкладкам конденсатора, а искровой промежуток применяется для того, чтобы увеличить разность потенциалов, до которой первоначально заряжаются обкладки.

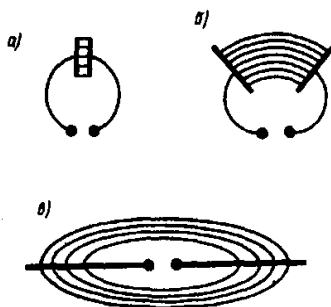
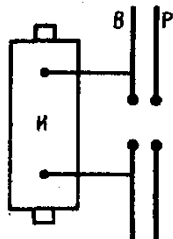


Рис. 11

Для возбуждения электромагнитных волн вибратор Герца  $V$  подключался к индуктору  $I$  (рис. 11,б). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробивного значения, возникала

искра, закорачивающая обе половины вибратора, и в нем возникали свободные затухающие колебания. При исчезновении искры контур размыкался и колебания прекращались. Затем индуктор снова заряжал конденсатор, возникала искра и в контуре опять наблюдались колебания и т. д. Для регистрации электромагнитных волн Герц пользовался вторым вибратором, называемым резонатором *P*, имеющим такую же частоту собственных колебаний, что и излучающий вибратор, т. е. настроенным в резонанс с вибратором. Когда электромагнитные волны достигали резонатора, то в его зазоре проскакивала электрическая искра.



С помощью описанного вибратора Герц экспериментировал с электромагнитными волнами, длина волны которых составляла примерно 3 м. П. Н. Лебедев, применяя миниатюрный вибратор из тонких платиновых стерженьков, получил миллиметровые электромагнитные волны с  $\lambda = 6 - 4$  мм.

Дальнейшее развитие методики эксперимента в этом направлении позволило в 1923 г. российскому физика А. А. Глаголевой-Аркадьевой (1884—1945) сконструировать **массовый излучатель**, в котором короткие электромагнитные волны, возбуждаемые колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр, проскакиваемых между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны с  $\lambda$  от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением.

Недостатком вибраторов Герца и Лебедева и массового излучателя Глаголевой-Аркадьевой являлось то, что свободные колебания в них быстро затухали и обладали малой мощностью. Для получения незатухающих колебаний необходимо создать автоколебательную систему, которая обеспечивала бы подачу энергии с частотой, равной частоте собственных колебаний контура. Поэтому в 20-х годах нашего столетия перешли к генерированию электромагнитных волн с помощью электронных ламп. Ламповые генераторы позволяют получать колебания заданной (практически любой) мощности и синусоидальной формы.

Электромагнитные волны, обладая **широким диапазоном частот** (или длин волн  $\lambda = c/\nu$ , где  $c$  — скорость электромагнитных волн в вакууме), отличаются друг от друга по способам их генерации и регистрации, а также по своим свойствам. Поэтому электромагнитные волны делятся на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения (табл.5). Следует отметить, что **границы** между различными видами электромагнитных волн довольно **условны**.

Вид излучения	Длина волны, м	Частота, Гц	Источники излучения
Радиоволны	$10^3 - 10^4$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Колебательный контур Вибратор Герца Массовый излучатель Ламповый генератор
Световые волны			
▪ Инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3.75 \cdot 10^{14}$	Лампы
▪ Видимый свет	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3.75 \cdot 10^{14} - 7.5 \cdot 10^{14}$	Лазеры
▪ Ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7.5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	
▪			
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Трубка Рентгена
Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад Ядерные реакции Космические процессы

## 7. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны.

Как уже указывалось (см. § 161), одним из важнейших следствий уравнений Максвелла (см. § 139) является существование электромагнитных волн. Можно показать, что для *однородной и изотропной среды вдали от зарядов и токов*, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что векторы напряженностей **E** и **H** переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа (154.9):

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (47)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (48)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,

$v$  — фазовая скорость.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (47) и (48), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн.

Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (49)$$

где  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ,

$\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно электрическая и магнитная постоянные,

$\varepsilon$  и  $\mu$  — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

В вакууме (при  $\varepsilon=1$  и  $\mu=1$ ) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью  $c$ . Так как  $\varepsilon\mu > 1$ , то скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

При вычислении скорости распространения электромагнитного поля по формуле (49) получается результат, достаточно хорошо совпадающий с экспериментальными данными, если учитывать зависимость  $\varepsilon$  и  $\mu$  от частоты.

Совпадение же размерного коэффициента в (49) со скоростью распространения света в вакууме указывает на глубокую связь между электромагнитными и оптическими явлениями, позволившую Максвеллу создать электромагнитную теорию света, согласно которой свет представляет собой электромагнитные волны.

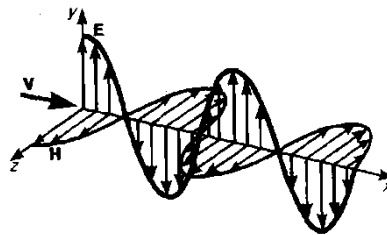


Рис.12

Следствием теории Максвелла является **поперечность электромагнитных волн**: векторы **E** и **H** напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны (на рис. показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны) и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору **v** скорости распространения волны, причем векторы **E**, **H** и **v** образуют правовинтовую систему.

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы **E** и **H** всегда колеблются в *одинаковых фазах* (см. рис. 12), причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (50)$$



Следовательно,  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д. От уравнений (47) и (48) можно перейти к уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (52)$$

где соответственно индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Уравнениям (51) и (52) удовлетворяют, в частности, плоские **монохроматические электромагнитные волны** (электромагнитные волны одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (53)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (54)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны,

$\omega$  — круговая частота волны,

$k = \omega/v$  — волновое число,

$\varphi$  — начальные фазы колебаний в точках с координатой  $x=0$ .

В уравнениях (53) и (54)  $\varphi$  одинаково, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковых фазах.

## 8. Энергия электромагнитных волн.

Возможность обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что они переносят энергию. Объемная плотность  $w$  энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_{эл}$  и  $w_m$ , электрического и магнитного полей:

$$w = w_{эл} + w_m = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2.$$

Учитывая выражение (50), получим, что плотности энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинаковы, т. е.  $w_{эл} = w_m$ . Поэтому

$$w = 2w_{эл} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon \mu} EH.$$

Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$  распространения волны в среде (см. (49)), получим модуль плотности потока энергии:

$$\mathbf{S} = w\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{H}.$$

Так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны праввинтовую систему, то направление вектора  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ .

**Вектор плотности потока электромагнитной энергии** называется **вектором Умова — Пойнтинга**:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Вектор  $\mathbf{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление.

Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца.

Однако значение этого давления ничтожно мало. Можно оценить, что при средней мощности солнечного излучения, приходящего на Землю, давление для абсолютно поглощающей поверхности составляет примерно 5 мкПа. В исключительно тонких экспериментах, ставших классическими, П. Н. Лебедев в 1899 г. доказал существование светового давления на твердые тела, а в 1910 г. — на газы. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения выводов теории Максвелла о том, что свет представляет собой электромагнитные волны.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс. Импульс электромагнитного поля

$$p = W/c,$$

где  $W$  — энергия электромагнитного поля.

Выражая импульс как  $p = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью  $c$ ), получим

$p = mc = W/c$ , откуда

$$W = mc^2. \tag{55}$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля является *универсальным законом* природы (см. также § 40). Согласно специальной теории относительности, выражение (163.1) имеет общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Таким образом, рассмотренные свойства электромагнитных волн, определяемые теорией Максвелла, полностью подтверждаются опытами Герца, Лебедева и выводами специальной теории относительности, сыгравшими решающую роль для подтверждения и быстрого признания этой теории.