
Лекции по физике.

Механика

Законы сохранения. Энергия, импульс и момент импульса механической системы. Условия равновесия

Законы сохранения

- **Механическая система** – это система тел, выделенных для рассмотрения
- Действующие на систему силы могут быть внешними и внутренними
- Если на систему действуют только внутренние силы, то она называется **замкнутой**

Законы сохранения

- Для замкнутой системы существуют функции координат и скоростей, которые сохраняются со временем – **интегралы движения**
- Для системы из N несвязанных частиц существует $6N-1$ интегралов движения. Интерес представляют только три аддитивных интеграла движения: энергия, импульс и момент импульса

Законы сохранения

- В основе законов сохранения энергии, импульса и момента импульса лежат соответственно свойства однородности времени, однородности и изотропности пространства
- Законы сохранения более общие, чем законы Ньютона, они выполняются всегда
- Использование законов сохранения позволяет облегчить решение задач

Закон сохранения энергии

- **Кинетическая энергия** $T = 1/2mv^2$ изолированной частицы сохраняется т.к.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) &= m\vec{v}\dot{\vec{v}} = m\dot{\vec{v}}\vec{v} \\ &= \vec{F}\vec{v} = 0 \quad \text{если} \quad \vec{F} = 0 \end{aligned}$$

Закон сохранения энергии

- Если $F \neq 0$, то приращение T :

$$dT = \vec{F} \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{S} = dA$$

$$\Delta T = \int_1^2 dT = \int_1^2 dA$$

т.е. при действии сил на частицу, изменение её кинетической энергии равно работе сил

- Для консервативных сил каждой точке пространства можно сопоставить **потенциальную энергию** тела $U(x,y,z)$

Закон сохранения энергии

- Работа по перемещению тела в поле
 $A_{12}=U_1-U_2$

- В случае замкнутой системы $T_2-T_1=U_1-U_2$ и $T_2+U_2=T_1+U_1$ или $E_1=E_2$

- Окончательно получим:

$$E=T+U=\text{const} \quad (1)$$

- Сумма кинетической и потенциальной энергии называется **механической энергией**

Закон сохранения энергии

- Уравнение (1) выражает **закон сохранения энергии**: *Механическая энергия замкнутой консервативной системы остаётся постоянной*
- В случае системы частиц:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad U = \sum_i U_i$$

Закон сохранения энергии

- В случае вращательного движения:

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}$$

$$dA = \vec{M}d\vec{\varphi} = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}$$

маятники Галилея и Максвелла

Условия равновесия механической системы

- Из (1) следует, что кинетическая энергия системы может возрасти только за счёт убыли её потенциальной энергии. Если же $T=0$ и система находится в состоянии с минимумом потенциальной энергии, то она не сможет выйти из этого состояния. Такое состояние называют **состоянием равновесия**

Условия равновесия механической системы

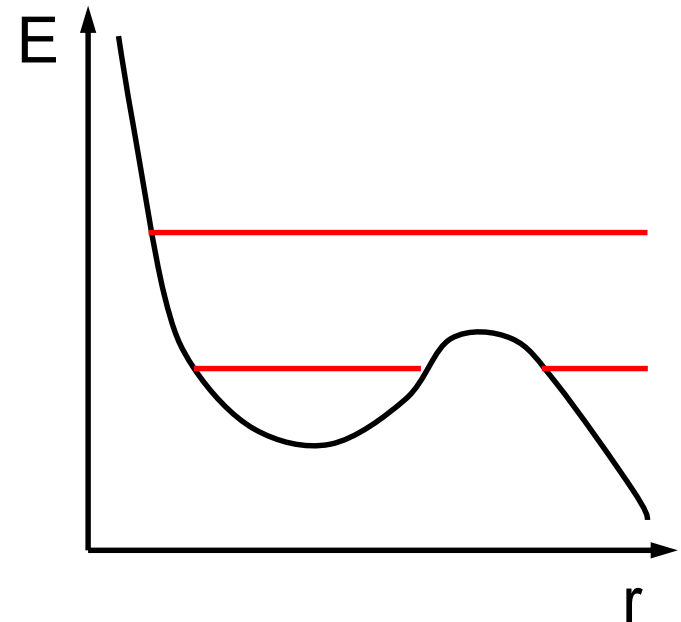
- Необходимым условием равновесия является равенство нулю первой производной потенциальной энергии в данной точке:

$$\frac{dU}{dr} = 0$$

- В зависимости от характера функции $U(x,y,z)$ различают устойчивое (минимум U) и неустойчивое (максимум U) положения равновесия

Условия равновесия механической системы

- В зависимости от соотношений между кинетической и потенциальной энергией частица может двигаться в ограниченной или неограниченной области пространства



условия равновесия

Закон сохранения импульса

- Рассмотрим систему из N взаимодействующих частиц. На i -ю частицу действуют внешняя \vec{F}_i' и внутренние \vec{F}_{ij} силы. Тогда:

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i' \quad (2)$$

- Сложим производные импульсов всех частиц

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i' \quad (3)$$

Закон сохранения импульса

- По третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

- Поэтому первая сумма в (3) равна нулю и

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (4)$$

- Из (4) следует, что при отсутствии внешних сил $\vec{p} = \text{const}$. Т.о. мы пришли к закону сохранения импульса

Закон сохранения импульса

- **Закон сохранения импульса:** *Импульс замкнутой системы материальных тел остаётся постоянным*
- Закон сохранения импульса можно использовать и для незамкнутых систем
 - Если сумма сил, действующих на тела, равна нулю
 - Если взаимодействие кратковременное
 - Если одна из проекций внешней силы равна нулю, то для этой проекции справедлив закон сохранения импульса



Упругие и неупругие взаимодействия

- При взаимодействии двух тел происходят превращения энергии из одного вида в другой
- Различают два предельных вида взаимодействий:
 - Упругое взаимодействие
 - Неупругое взаимодействие

Упругие и неупругие взаимодействия

- С помощью законов сохранения энергии и импульса можно решить важную для практики задачу соударения двух тел в случае абсолютно упругого или абсолютно неупругого удара. В этой задаче из известных начальных скоростей и масс тел надо найти их скорости после удара

Упругие и неупругие взаимодействия

- В первом случае механическая энергия взаимодействующих тел не переходит в другие виды энергии (консервативная система)
- В случае неупругого взаимодействия механическая энергия превращается в другие виды энергии
- К замкнутой системе закон сохранения энергии применим только в первом случае, а закон сохранения импульса - в обоих

Упругие и неупругие взаимодействия

- После абсолютно неупругого удара тела будут иметь одинаковую скорость:

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

- После абсолютно упругого удара скорости тел будут равны:

$$v_1 = \frac{2m_2 v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 v_{10} + (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}$$

упругое и
неупругое
взаимодействие

Центр масс

- **Центр масс системы** – это точка, положение которой задаётся радиус-вектором:

$$\vec{r}_{\text{цм}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

- Импульс системы может быть представлен как произведение суммарной массы на скорость центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{v}_{\text{цм}}$$

Центр масс

- **Закон сохранения центра масс:** У замкнутой системы центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно

сохранение
положения
центра масс

Закон сохранения момента импульса

- Момент импульса частицы:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

где r – радиус-вектор частицы

- Для изолированной частицы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = [\dot{\vec{r}}, \vec{p}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] =$$
$$[\vec{v}, \vec{p}] + [\vec{r}, \vec{F}] = 0$$

Закон сохранения момента импульса

- Таким образом мы пришли к закону сохранения момента импульса свободной частицы. Можно показать, что этот закон справедлив и для замкнутой системы взаимодействующих частиц

- Момент импульса системы частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

- **Закон сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы остаётся постоянным*

$$\vec{L} = \text{const}, \quad \dot{\vec{L}} = 0$$

Закон сохранения момента импульса

- Момент импульса незамкнутой системы будет так же сохраняться, если суммарный момент сил действующих на эту систему равен нулю
- Как и закон сохранения импульса закон сохранения момента импульса можно использовать при рассмотрении столкновений частиц в незамкнутой системе

Закон сохранения проекции момента импульса

- **Закон сохранения проекции момента импульса:** *в незамкнутой системе сохраняется проекция момента импульса на неподвижную ось вращения, если сумма моментов сил относительно этой оси равна нулю*

$$\vec{L}_z = \text{const}, \quad \dot{\vec{L}}_z = 0$$

сохранение
момента
импульса

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ